V. DIACONIȚA, A. MANOLACHI, GH. RUSU

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

VOL. II

Editura Fundației „Chemarea" IAȘI
1993

Scanned with OKEN Scanner

V. DIACONIȚA, A. MANOLACHI, GH. RUSU

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

Elemente de analiză matematică

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Această parte a cursului de Matematici aplicate în economie conține noțiunile și conceptele de bază ale analizei matematice strict necesare pentru abordarea problemelor de optimizare neliniară, teoria probabilităților și statistică matematică.

Au fost incluse aici elemente de teoria seriilor numerice și a seriilor de funcții, de teoria funcțiilor de n variabile, precum și unele probleme speciale de calcul integral și teoria ecuațiilor diferențiale.

De asemenea, s-au pus în evidență aplicații ale teoriei funcțiilor în probleme de analiză economică.

Pentru a ne putea încadra în programa cursului de matematici cu structura lui actuală a trebuit să omitem unele demonstrații sau capitole cu caracter elementar considerînd de datoria noastră să indicăm literatura de specialitate în care acestea pot fi găsite.

Convinși fiind că structura și conținutul acestui curs pot fi îmbunătățite vom fi receptivi la orice observație și sugestie din partea acelora care îl vor parcurge.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1. *SERII NUMERICE ŞI SERII DE FUNCŢII.*

§1. SERII NUMERICE.

1.1. *Noţiunea de convergenţă.*

Fiind date n numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$, putem asocia întotdeauna expresiei

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

un număr S, care poartă numele de suma celor n numere şi se scrie :

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Fie acum $(a_n)_{n \in N}$ un şir de numere reale.

Definiţia 1.1.1. Se numeşte *serie numerică* suma algebrică cu o infinitate de termeni :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Se mai utilizează notaţiile $\sum_{n} a_n$, $\sum_{n \in N} a_n$ sau, pur şi simplu, $\sum^{\infty} a_n$, subînţelegîndu-se din context care este prima valoare a lui n. Elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc termenii seriei ; a_n se numeşte termen general.

În funcţie de natura termenilor, seriile se clasifică astfel :

— serii cu termeni pozitivi

— serii cu termeni alternaţi (serii alternate) şi

— serii cu termeni oarecare.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum o serie generică :

$$(S)\ ; \qquad \sum^{\infty} a_n$$

Pentru a vedea cînd i se poate atribui un sens acestui simbol, considerăm următoarele *sume parțiale* :

$$\begin{aligned} &s_1 = a_1, \\ &s_2 = a_1 + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &s_{n+p} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}, \ p \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Cu acestea, putem forma șirul de numere reale:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

Șirul $(s_n)_{n \in N}$ poartă numele de *șir al sumelor parțiale* asociat seriei (S).

Definiția 1.1.2. Dacă șirul $(s_n)_{n \in N}$ are limită, adică există

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

și numărul s este finit, se spune că seria (S) este convergentă. Numărul s se numește *suma* seriei și se scrie :

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \ (s = \sum^{\infty} a_n)$$

În cazurile cînd $s = \pm\infty$ sau nu există, vom spune că seria (S) este divergentă și nu vom atribui nici un sens sumei $\sum a_n$. De asemenea, vom exclude din categoria seriilor convergente pe acelea în care șirul sumelor parțiale este oscilant, caz în care spunem că $\sum^{\infty} a_n$ este o *serie oscilantă*.

Să analizăm, pe baza definiției, convergența următoarei serii :

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \ (\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}) \tag{1.1.2}$$

numită *seria geometrică* (termenii seriei se succed în progresie geometrică).

Scanned with OKEN Scanner

Construim şirul sumelor parţiale (s_n). Conform formulei care dă suma a n termeni ai unei progresii geometrice, pentru $q \neq 1$, vom avea :

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

Natura şirului (s_n) depinde de valorile pe care le are raţia q.

Se pot pune în evidenţă următoarele situaţii :

a) $|q| < 1$. În cast caz, $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$ (număr finit).

b) $|q| > 1$. În acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty$ şi şirul s_n are limită infinită.

c) $q = 1$. În acest caz, seria (1.1.2) se scrie

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

Avem

$$s_n = a + a + \ldots + a = na$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty(\operatorname{sgn} a),\quad \operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

d) $q = -1$. Pentru această valoare a lui q seria este oscilantă :

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1}a + \ldots$$

Dacă considerăm şirul sumelor parţiale de rang par, s_{2n}, se obţine

$$s_{2n} = 0 \tag{1.1.3}$$

şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = 0$.

Considerînd şirul sumelor parţiale de rang impar, vom avea

$$s_{2n+1} = a$$

şi, prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = a \tag{1.1.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1.1.3) și (1.1.4) rezultă că șirul sumelor parțiale este oscilant și, deci, neconvergent.

În concluzie, seria geometrică (1.1.2) este convergentă în cazul $|q|<1$, și are ca sumă numărul $s=\frac{a}{1-q}$. Vom scrie deci:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q}$$

În celelalte cazuri, seria este divergentă.

Exemple.

1. Seria

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

este convergentă, deoarece poate fi scrisă sub forma:

$$1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

rația ei fiind $q=\frac{1}{2}$, $q<1$. Suma seriei va fi $s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Deci,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots=2$$

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}3^n=3+3^2+3^3+\ldots+3^n+\ldots$ este divergentă, deoarece, $q=3>1$.

În legătură cu o serie se pun două probleme, și anume:

a) care este natura seriei, ceea ce înseamnă dacă este convergentă sau nu;

b) în cazul cînd seria este convergentă, care este suma ei?

La prima întrebare se poate răspunde examinînd șirul sumelor parțiale (s_n) și aplicînd definiția (1.1.2). În multe cazuri este dificil de examinat problema în acest fel, deoarece nu întotdeauna expresia lui s_n se poate restrînge, ca în cazul seriei geometrice, pentru a putea găsi $s=\lim_{n\to\infty}s_n$ și a decide

convergența seriei. În acest caz se folosesc anumite criterii care nu fac apel la limita șirului (s_n) și ne permit să tragem concluzii asupra convergenței. Un astfel de criteriu este criteriul general de convergență a seriilor, care decurge din criteriul lui Cauchy de convergență a șirurilor.

Teorema 1.1.1. (*Cauchy*). Fie (S): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică. Condiția necesară și suficientă ca seria (S) să fie convergentă este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, și suficient de mic, să existe un întreg $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și $p = 1, 2, \ldots$ să avem:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{1.1.5}$$

Demonstrație: *Necesitatea.* Presupunem că seria (S) este convergentă. Deci șirul $(s_n)_{n \in N}$ este convergent. Conform criterului de convergență a șirurilor, pentru orice $\varepsilon > 0$ există uni rang $N(\varepsilon)$, astfel încît, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și $p \geqslant 1$, are loc inegalitatea:

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

Dar, din (1.1.1), rezultă:

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|$$

și, deci, va trebui să avem:

$$|a_{n+1} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Suficiența. Dacă (1.1.5) este adevărată, atunci

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, $n > N(\varepsilon)$ și $p = 1, 2, \ldots$. Prin urmare, șirul sumelor parțiale (s_n) satisface criteriul lui Cauchy pentru șiruri și deci el va fi convergent. Ca urmare seria (S) va fi convergentă.

Proprietăți ale seriilor convergente.

Dintre proprietățile generale ale seriilor convergente vom enumera doar cîteva pe care le vom folosi în mod concret în cele ce urmează:

1. Dacă (S_1): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și (S_2): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt convergente, atunci seria sumă $(S_1 + S_2)$: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este de asemenea convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

convergența seriei. În acest caz se folosesc anumite criterii care nu fac apel la limita șirului (s_n) și ne permit să tragem concluzii asupra convergenței. Un astfel de criteriu este criteriul general de convergență a seriilor, care decurge din criteriul lui Cauchy de convergență a șirurilor.

Teorema 1.1.1. (*Cauchy*). Fie (S): $\sum^{\infty} a_n$ o serie numerică. Condiția necesară și suficientă ca seria (S) să fie convergentă este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, și suficient de mic, să existe un întreg $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și $p = 1, 2, \ldots$ să avem:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{1.1.5}$$

Demonstrație: *Necesitatea.* Presupunem că seria (S) este convergentă. Deci șirul $(s_n)_{n \in N}$ este convergent. Conform criteriului de convergență a șirurilor, pentru orice $\varepsilon > 0$ există uni rang $N(\varepsilon)$, astfel încît, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și $p \geqslant 1$, are loc inegalitatea:

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

Dar, din (1.1.1), rezultă:

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|$$

și, deci, va trebui să avem:

$$|a_{n+1} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Suficiența. Dacă (1.1.5) este adevărată, atunci

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, $n > N(\varepsilon)$ și $p = 1, 2, \ldots$. Prin urmare, șirul sumelor parțiale (s_n) satisface criteriul lui Cauchy pentru șiruri și deci el va fi convergent. Ca urmare seria (S) va fi convergentă.

Proprietăți ale seriilor convergente.

Dintre proprietățile generale ale seriilor convergente vom enumera doar cîteva pe care le vom folosi în mod concret în cele ce urmează:

1. Dacă (S_1): $\sum^{\infty} a_n$ și (S_2): $\sum^{\infty} b_n$ sînt convergente, atunci seria sumă $(S_1 + S_2)$: $\sum^{\infty} (a_n + b_n)$ este de asemenea convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă $(S_1): \overset{\infty}{\Sigma} a_n$ este convergentă și $\alpha \neq 0$, un scalar, atunci seria $(\alpha S_1): \overset{\infty}{\Sigma} \alpha a_n$ este, de asemenea, convergentă.

3. Prin adăugarea sau suprimarea unui număr finit de termeni, natura seriei nu se modifică.

4. Dacă $(S): \overset{\infty}{\Sigma} a_n$ este convergentă, atunci șirul temenilor $(a_n)_{n \in N}$ este convergent la zero, adică:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Demonstrația proprietății 4. Din convergența seriei (S), conform Definiției 1.1.2, are loc:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \text{ (finită)}$$

Deoarece putem scrie

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$$

trecînd la limită în ambii membrii, vom obține

$$\lim_{n \to \infty} s_{n+1} - \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$$

și deci:

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = s - s = 0$$

Să reținem că proprietatea 4 este numai o condiție *necesară* de convergență, nu și suficientă.

Pentru a ne convinge de aceasta, să considerăm seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

numită și *seria armonică*, Observăm că

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

adică proprietatea 4 este satisfăcută. Totuși, seria armonică nu este convergentă. Într-adevăr, aplicînd criteriul lui Cauchy acestei serii, vom avea:

Scanned with OKEN Scanner

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}$$

și, punînd $p=n$, rezultă:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

Constatăm deci că segmentul de serie $a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}$ nu numai că nu poate fi făcut mai mic decît orice $\varepsilon>0$, dar rămîne chiar superior numărului fix 1/2. Aceasta înseamnă că seria nu este convergentă, deoarece criteriul lui Cauchy nu este satisfăcut.

Prin negarea proprietății 4, rezultă o condiție suficientă, (un criteriu) de divergență, și anume:

Criteriu de divergență. Dacă termenii seriei (S): $\sum^{\infty} a_n$ nu formează un șir convergent la zero, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$$

atunci seria (S) este divergentă.

Exemple:

1. Considerăm seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2^n=+\infty$ și seria este divergentă. Faptul acesta se putea constata și în alt mod, observînd că seria dată este o serie geometrică de rație $q=2>1$.

2. Se consideră seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, conchidem că și această serie este divergentă.

Definiția 1.1.3. Fie (S): $\sum^{\infty} a_n$ o serie numerică. Se numește *rest de ordin n* al seriei (S), expresia:

Scanned with OKEN Scanner

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p$$

Observăm că atunci cînd seria (S) este convergentă, putem scrie :

$$s = s_n + r_n \tag{1.1.5}$$

5. Dacă (S) este convergentă, atunci șirul format cu resturile sale $(r_n)_{n \in N}$ este convergent și :

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0$$

Demonstrație. Trecînd la limită în relația (1.1.5), obținem

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n + \lim_{n \to \infty} r_n$$

și cum $\lim_{n \to \infty} s_n = s$, va rezulta :

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0$$

Această proprietate are o importanță deosebită în răspunsul la problema b), aceea a determinării sumei unei serii convergente.

În multe situații, calculul direct al sumei s pe baza definiției 1.1.2 este anevoios, din cauza formei complicate pe care o poate avea s_n. Totuși, pe baza proprietății 5, putem să ne apropiem de suma s, calculînd-o cu o aproximație, oricît de bună. Astfel, dacă presupunem că n este suficient de mare și seria este convergentă, atunci restul poate fi făcut oricît de mic. Punînd

$$r_n \simeq s_n$$

în baza relației (1.1.5), vom avea, cu aceeași eroare,

$$s \simeq s_n \tag{1.1.6}$$

Aceasta înseamnă că suma s a seriei poate fi aproximată cu suma parțială s_n. Pentru exemplificare, considerăm seria :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem demonstra că această serie este convergentă și are ca sumă numărul irațional e ($e=2{,}7182\ldots$). Într-adevăr, suma parțială de rang n, asociată acestei serii este:

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Considerînd binomul $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ și ridicîndu-l la puterea n, după unele transformări, vom avea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

de unde, pentru $n>k$, rezultă:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Trecînd la limită în raport cu n, obținem:

$$e \geqslant s_n; \quad \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\right).$$

Deoarece k este arbitrar, putem scrie, pentru orice n,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < s_n \leqslant e.$$

La limită, această dublă inegalitate conduce la concluzia

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Dar numărul e este irațional*). Pentru a obține o valoare aproximativă a lui, vom aplica formula (1.1.6), adică vom lua

$$e \simeq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} = s_n$$

*) Un număr irațional se poate reprezenta printr-un număr zecimal avînd o parte întreagă și o infinitate de zecimale fără perioadă.

Scanned with OKEN Scanner

În teoria aproximării funcțiilor, se demonstrează că

$$|e-s_n|<\frac{3}{(n+1)!}$$

ceea ce arată că pentru n suficient de mare, restul r_n este destul de mic. De exemplu, dacă luăm $n=5$, se obține pentru e valoarea aproximativă $e=2{,}7166....$ pentru $n=15$, se obține valoarea numărului e cu 13 zecimale exacte, $e=2{,}7182818284590...$, [10].

Pe baza procedeului de aproximare descris mai sus, se alcătuiesc programele de calcul ale valorilor diferitelor funcții pe calculatoarele electronice.

1.2. *Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență.*

Definiția 1.1.4. Seria $\sum^{\infty} a_n$ se numește cu termeni pozitivi, dacă începînd cu $n>N$, toți termenii ei sînt nenegativi : $a_n \geqslant 0$.

În baza proprietății 3, putem presupune că aceasta se întîmplă începînd chiar cu primul termen al seriei, deoarece dacă un număr finit de termeni nu sînt pozitivi, îi putem înlătura fără a modifica natura seriei.

Este evident că definițiile și proprietățile amintite pînă acum se mențin pentru seriile cu termeni pozitivi.
Dar, datorită faptului că termenii seriei sînt pozitivi, vom întîlni la astfel de serii proprietăți și criterii speciale de convergență. Astfel, deoarece $a_n \geqslant 0$, va rezulta în primul rînd că $s_n \geqslant 0$ și deci, o serie cu termeni pozitivi sau este convergentă sau are suma $s=+\infty$.

În al doilea rînd, vom observa că șirul sumelor parțiale (s_n), asociat seriei (S) : $\sum^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, este monoton crescător, deoarece avem :

$$s_{n+1}=s_n+a_{n+1}$$

Cum $a_{n+1} \geqslant 0$, rezultă $s_{n+1} \geqslant s_n$. De aici, urmează un prim criteriu de convergență :

1.1.1. *Criteriul mărginirii.* Seria (S) : $\sum^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$, este convergentă, dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale (s_n) este mărginit superior.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația acestui criteriu se bazează pe teorema de convergență a șirurilor monotone și o lăsăm în seama cititorului.

Alte criterii de convergență:

1.1.2. *Criteriul comparației.* Fie $(S_1): \sum^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$ și $(S_2): \sum^{\infty} b_n$, $b_n \geqslant 0$, două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că

(1.1.7) $$a_n \leqslant b_n$$

începînd de la o anumită valoare a lui n $(n > N)$.

a) dacă seria (S_2) este convergentă, atunci și (S_1) este convergentă,

b) dacă seria (S_1) este divergentă, atunci și (S_2) este divergentă.

Demonstrație. Fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ și $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, sumele parțiale ale celor două serii. Din (1.1.7) va rezulta:

(1.1.8) $$0 \leqslant s_n \leqslant t_n.$$

Cazul a. Presupunînd că (S_2) este convergentă, vom avea $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ (finită) Trecînd la limită în (1.1.8) vom obține

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant t$$

ceea ce arată că șirul (s_n) asociat seriei (S_1) nu poate fi decît convergent, deoarece limita sa este finită și cuprinsă în intervalul $[0, t]$. Așadar, seria (S_1) va fi convergentă.

Cazul b. Să presupunem că (S_1) este divergentă. Conform unei observații anterioare:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$$

Trecînd la limită în (1.1.8), vom obține:

$$+\infty \leqslant \lim_{n\to\infty} t_n$$

Or, de aici rezultă că $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ și deci seria (S_2) este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Din acest criteriu rezultă un procedeu foarte simplu pentru studiul convergenței sau divergenței unei serii. Astfel:

— dacă termenul general al seriei date este majorat de termenul general al unei serii convergente, conform alternativei *a*, va rezulta convergența seriei date;

— dacă termenul general al seriei considerate este minorat de termenul general al unei serii divergente, în baza alternativei *b*, va rezulta divergența seriei date.

Exemple.

1. Considerăm seria:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$$

Avem

$$\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n = \left[\frac{2n}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}\right]^n = \left(\frac{2}{3+\frac{1}{n}}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Cum seria cu termenul general $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ este convergentă ca serie geometrică de rație $q=\frac{2}{3}<1$, va rezulta că seria dată este convergentă.

2. Considerăm seria:

$$\sum_1^\infty \frac{n+2}{n^2+4}$$

Observăm că putem face minorarea:

$$\frac{n+2}{n^2+4} > \frac{n+2}{n^2+4n+4} = \frac{n+2}{(n+2)^2} = \frac{1}{n+2}$$

Dar seria cu termenul general $\frac{1}{n+2}$ este divergentă, deoarece ea coincide cu seria armonică din care s-au lăsat la o parte primii doi termeni.

Rezultă că seria din enunț este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

1.1.3. *Criteriul lui Cauchy (al radicalului)*

Fie (S): $\sum^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$. Dacă există N, astfel încît pentru orice $n > N$, are loc

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$$

atunci (S) este convergentă, iar dacă

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant q > 1$$

seria (S) este divergentă.

Demonstrație. În cazul întîi, prin eliminarea radicalului va rezulta:

$$a_n \leqslant q^n \text{ pentru orice } n > N.$$

Dar seria cu termenul general q^n, în care $q < 1$, este convergentă și în baza alternativei a) din criteriul comparației, urmează că seria (S) este convergentă. În cazul al doilea, obținem:

$$a_n \geqslant q^n$$

și dacă $q > 1$ seria cu termenul general q^n fiind divergentă, aplicînd alternativa b), din criteriul comparației, va rezulta că (S) este divergentă.

În practică, se aplică o formă mai restrictivă a acestui criteriu și anume:

1.1.3'. *Criteriul cu limită.*

Fie (S): $\sum^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$. Dacă există

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

atunci, pentru

1. $q < 1$ — seria (S) este convergentă
2. $q > 1$ — seria (S) este divergentă
3. $q = 1$ — nu se poate spune nimic despre natura seriei (S).

Exemple.

1. Se consideră seria:

BIBLIOTECA JUDEȚEANĂ „GH. ASACHI" IAȘI

614.096

$$\sum_1^\infty \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

Aplicînd criteriul radicalului sub cea de a doua formă, obținem :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^2 = e^{-2}.$$

Rezultă $q=\frac{1}{e^2}<1$ și deci seria este convergentă.

2. Se consideră seria :

$$\sum_1^\infty \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$$

Avem :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

Deoarece $q=2>1$, va rezulta că seria este divergentă.

3. Considerăm seria :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$$

Aplicînd criteriul rădăcinii, obținem :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} = \frac{1}{1} = 1$$

Sîntem în cazul 3, cînd nu putem decide convergența serie cu ajutorul criteriului radicalului.

1.1.4. *Criteriul lui D'Alembert (al raportului).*

Fie (S) : $\sum_1^\infty a_n$, $a_n \geqslant 0$. Dacă există N, astfel încît pentru orice $n>N$, are loc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$$

seria (S) este convergentă, iar dacă :

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q > 1$$

seria (S) este divergentă.

Demonstrație. În primul caz, putem scrie :

$$a_{n+1} \leqslant q a_n \leqslant q^2 a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant q^n a_1$$

unde a_1 este primul termen al seriei.

Cum în cazul $q<1$, seria cu termenul general $q^n a_1$ este convergentă ca serie geometrică, va rezulta că seria (S) este convergentă.

În cel de al doilea caz, putem stabili o inegalitate de forma

$$a_{n+1} \geqslant q^n a$$

și dacă $q>1$, seria cu termenul general $q^n a_1$ fiind divergentă, va rezulta că (S) este divergentă.

Ca și în cazul criteriului radicalului, în practică, criteriul raportului se aplică sub forma următoare :

1.14′. *Criteriul cu limită.*

Fie $(S) : \sum^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$. Dacă există

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

atunci, pentru

1. $q<1$, seria (S) este convergentă,
2. $q>1$, seria (S) divergentă,
3. $q=1$, nu se poate spune nimic despre natura seriei (S).

Exemple.

1. Se consideră seria :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Aplicînd criteriul raportului sub forma de mai sus, vom avea:

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}$$

Rezultă $q=\frac{2}{e}<1$ și, prin urmare, seria este convergentă.

2. Considerăm acum seria :

$$\sum_1^\infty \frac{3^n n!}{n^n}$$

Efectuînd calculele ca mai sus, vom obține

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{e}$$

și cum $\frac{3}{e}>1$, va rezulta că seria este divergentă.

3. Reuăm seria :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$$

Avem :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$$

și nu putem decide nici cu acest criteriu dacă seria este convergentă sau nu.

1.1.5. *Criteriu lui Raabe-Duhamel.*

Vom formula acest criteriu, fără demonstrație, sub forma sub care se aplică el de obicei în practică în mod frecvent.

Fie (S) : Σa_n, $a_n \geq 0$. Dacă există :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q$$

atunci, pentru:

1. $q>1$, seria (S) este convergentă,
2. $q<1$, seria (S) este divergentă,
3. $q=1$, nu se poate face nici o afirmație despre natura seriei prin acest criteriu.

Exemple.

1. Se consideră seria:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

Dacă aplicăm criteriul lui Cauchy sau criteriul lui D'Alembert constatăm că ne situăm în cel de al treilea caz, obținînd pentru q valoarea 1. Să aplicăm acum criteriul de mai sus. Vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\,\frac{n^2+2n+1-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{1}=+\infty$$

Rezultă $q=+\infty>1$ și deci seria este convergentă.

2. Se consideră seria:

$$\sum_1^\infty \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},\ a\in R.$$

Aplicînd criteriul raportului se obține $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ și deci sîntem din nou în situația 3.

Dacă acum studiem convergența seriei cu ajutorul criteriului Raabe și Duhamel, după efectuarea calculelor, se obține:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}=a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, vom avea situaţiile :

1. dacă $a>1$, seria este convergentă,
2. dacă $a<1$, seria este divergentă,
3. pentru $a=1$, criteriul nu ne spune nimic.

Observaţie. În toate cazurile 3, există două posibilităţi de studiu al naturii seriei şi anume : se aplică un criteriu mai „tare" decît cel folosit sau se întreprinde o analiză directă asupra seriei. În acest sens vom da două exémple :

Exemplul 1. Să revenim la seria

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$$

Criteriul radicalului şi cel al raportului nu ne spun nimic. Aplicînd criteriul 1.1.5, vom deduce că seria este convergentă. Dar, dacă nu am fi avut la dispoziţie acest criteriu, puteam raţiona astfel : termenul general al seriei date poate fi majorat sub forma :

$$\frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Cum seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$ este convergentă, conform criteriului comparaţiei, va rezulta că seria dată este convergentă.

Exemplul 2. Să revenim la cazul $a=1$ în exemplul 2 de la p. 21.

În acest caz, avem :

$$\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} = \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Prin urmare, seria dată se reduce la seria armonică şi, deci, ea va fi divergentă.

Exemplul 3. Să considerăm seria :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{cu} \quad \alpha \in R$$

numită *seria armonică generalizată.* Dacă $\alpha \leqslant 1$, putem scrie :

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$$

și cum seria noastră poate fi comparată prin minorare cu seria armonică ea, va fi divergentă. Dacă $\alpha > 1$, și este un număr întreg pozitiv, $\alpha = 2, 3, \ldots$, aplicînd criteriul lui Raabe și Duhamel se constată că seria este convergentă. Dacă $\alpha > 1$, dar nu este întreg, nu se mai poate decide convergența seriei prin criteriul 1.1.5 și vom studia direct natura seriei. Pentru aceasta, scriem termenul general al șirului sumelor parțiale sub forma :

$$s_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k\alpha}} + \frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}\right)$$

Deoarece, pentru $\alpha > 1$.

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} < \frac{2}{2^\alpha}, \quad \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < \frac{2^2}{2^{2\alpha}}, \text{ etc.},$$

efectuînd majorarea lui s_n, vom obține :

$$s_n < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2\alpha-2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{2^{p(\alpha-1)}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{(k+1)(\alpha-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}$$

Constatăm deci că șirul sumelor parțiale este mărginit superior pentru orice $\alpha > 1$, neîntreg. În concluzie, seria armonică generalizată $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ și divergentă dacă $\alpha \leqslant 1$, cu $\alpha \in R$.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. *Serii alternate.*

Definiția 1.1.5. O serie de forma :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^{n-1} a_n + \ldots \tag{1.1.9}$$

în care $a_n \geqslant 0$ se numește *serie alternată.*

Putem presupune întotdeauna că seriile alternate sînt de forma (1.1.9) deoarece, în caz contrar, aplicînd proprietatea 2 a seriilor, prin înmulțire cu -1, se ajunge la cazul de mai sus.

Pentru seriile alternate se demonstrează un criteriu de convergență care se bazează tocmai pe proprietatea de alternanță a semnelor. Acest criteriu este :

1.1.1 *Criteriul lui Leibniz.* Fie seria $(S): \sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geqslant 0$. Dacă :

1. șirul $(a_n)_{n \in N}$, format cu termenii seriei, este monoton descrescător și

2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

atunci seria alternată (S) este convergentă.

Demonstrația acestui criteriu poate fi găsită în [2].

Spre exemplificare vom considera seria

$$(S) \qquad \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

numită și *seria armonică alternată.*

Observăm că $a_{n+1} < a_n$ deoarece $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ pentru orice $n > 1$; deci termenii seriei formează un șir monoton descrescător. Este îndeplinită condiția 1 a criteriului lui Leibniz. În plus,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fiind îndeplinită și cea de a doua condiție, rezultă că seria armonică alternată este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

1.4. *Serii cu termeni oarecare.*

Fie $(S): \overset{\infty}{\Sigma} a_n$ o serie cu termeni oarecare. Asociem acestei serii, seria $(\bar{S}): \overset{\infty}{\Sigma} |a_n|$, numită seria modulelor sau seria valorilor absolute.

$$(S): a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$(\bar{S}): |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

Ne propunem să stabilim dacă există vreo legătură din punct de vedere al convergenței între acestei două serii. Convergența seriei (S) implică convergența seriei $(\bar{S})$ sau convergența seriei $(\bar{S})$ implică convergența seriei (S) ?

În privința primei afirmații, avem imediat cel puțin un exemplu, care o infirmă. Într-adevăr, dacă considerăm seria armonică alternată drept serie (S), atunci seria $(\bar{S})$ este seria armonică

$$(S): \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \qquad (\bar{S}): \sum_1^\infty \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n}.$$

În timp ce, conform criteriului lui Leibniz, seria armonică alternată este convergentă, seria modulelor $(\bar{S})$ este divergentă Prin urmare, dacă (S) este convergentă, $(\bar{S})$ poate să nu fie convergentă.

Definiția 1.1.6. Fie $(S): \overset{\infty}{\Sigma} a_n$ o serie cu termeni oarecare și $(\bar{S}): \overset{\infty}{\Sigma} |a_n|$ seria formată cu modulele (valorile absolute) termenilor seriei date. Dacă seria $(\bar{S})$ este convergentă vom spune că (S) este *absolut convergentă.*

Între noțiunea de convergență întîlnită pînă acum și noțiunea de convergnță absolută definită mai sus, există o strînsă legătură care răspunde, de fapt, la cea de a doua întrebare formulată mai sus și anume :

Teorema 1,1.2. Dacă seria (S) este absolut convergentă ea este convergentă (convergența absolută implică convergență obișnuită).

Demonstrație. Presupunem că (S) este absolut convergentă. Aceasta înseamnă că $(\bar{S})$ este convergentă și conform

Scanned with OKEN Scanner

criteriului general de convergență al lui Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ și $p = 1, 2, \ldots$

$$||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|| < \varepsilon$$

Pe de altă parte, folosind proprietățile modulului, vom avea :

$$||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|| = |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

De aici rezultă

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

adică seria (S) este convergentă.

Importanța acestei teoreme constă în faptul că reduce problema convergenței unei serii cu termeni oarecare la problema convergenței absolute. Or, seria $(\bar{S})$, a valorilor absolute fiind o serie cu termeni pozitivi, poate fi studiată cu ajutorul criteriilor de convergență proprii acestor serii.

Exemplu. Să se studieze convergența seriei

$$(S) \qquad \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n^3}, \quad t \in R$$

în care t este un parametru fixat.
Seria $(\bar{S})$ corespunzătoare este

$$(\bar{S}) \qquad \sum_1^\infty \left| \frac{\sin nt}{n^3} \right|$$

și este o serie cu termeni pozitivi. Pentru studiul naturii ei aplicăm criteriul comparației. Avem

$$\left| \frac{\sin nt}{n^3} \right| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

deoarece, oricare ar fi n, $|\sin nt| \leqslant 1$.

Dar seria cu termenul general $\frac{1}{n^3}$ este convergentă, deoarece este seria armonică generalizată cu $\alpha = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă, deci, că seria $(\bar{S})$ este convergentă, adică (S) este absolut convergentă și, în baza teoremei 1.1.2, va rezulta că (S) este convergentă.

Observație. O serie convergentă dar nu și absolut convergentă, se numește *semiconvergentă.* O astfel de serie este seria armonică alternată.

§ 2. SERII DE FUNCȚII

2.1. *Șiruri de funcții. Convergență.*

2.1.a. *Convergența punctuală (punct cu punct).*

Fie $(u_n(x))_{n\in N}$, sau pe scurt $(u_n(x))$, un șir de funcții definite toate pe același interval $I\subset R$, cu valori în R:

$$u_n : I\to R, \qquad n\in N.$$

Dacă $x_0\in I$, putem alcătui șirul valorilor funcțiilor $(u_n(x))$ în punctul x_0, adică:

$$u_1(x_0),\ u_2(x_0)\ldots,\ u_n(x_0),\ \ldots \tag{1.2.1}$$

Acesta este un șir numeric.

Definiția 1.2.1. Dacă șirul $(u_n(x_0))$ este convergent și u_0 este limita sa, adică

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_0)=u_0$$

vom spune că șirul de funcții $u_n(x)$ este *convergent* în punctul $x_0\in I$.

Putem caracteriza convergența șirului (1.2.1) în limbajul obișnuit al șirurilor astfel: pentru orice $\varepsilon>0$, există un rang $N(\varepsilon,\ x_0)$ astfel încît, pentru orice $n>N(\varepsilon,\ x_0)$, are loc inegalitatea:

$$|u_n(x_0)-u_0|<\varepsilon \tag{1.2.2}$$

în această formulare am notat rangul N cu $N(\varepsilon,\ x_0)$ deoarece, după cum se poate lesne înțelege într-un alt punct $x_0\in I$, inegalitatea (1.2.2) va fi satisfăcută, de la un alt rang N înainte.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, întîlnim aici o noțiune nouă și anume noțiunea de convergență a unui șir de funcții într-un punct, sau convergența *punctuală*.

Dacă șirul $(u_n(x))$ este convergent în toate punctele unui interval $I_1 \subseteq I$, vom spune că el este convergent punctual (sau punct cu punct) pe I_1.

Corespondența care asociază fiecărui punct $x_0 \in I_1$ numărul unic, $u_0 \in R$, definește o funcție, $u(x): I_1 \to R$, care poartă numele de *funcția limită* a șirului $u_n(x_0)$. Se scrie:

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

Se mai spune că șirul $(u_n(x))$ converge punctual la $u(x)$ pe mulțimea $I_1 \subseteq I$.

Exemplu. Fie șirul de funcții $u_n:(0, \infty)\to R$:

$$u_n(x)=\frac{x}{x+n}$$

Considerăm $x_0=1$. Obținem șirul

$$u_n(x_0)=u_n(1)=\frac{1}{1+n} \text{ și } \lim_{n\to\infty} u_n(1)=0.$$

Dacă luăm $x_0=2$, avem

$$u_n(x_0)=u_n(2)=\frac{2}{2+n} \text{ și } \lim_{n\to\infty} u_n(2)=0, \text{ ș.a.m.d}$$

Putem demonstra că oricare ar fi x_0 fixat din mulțimea $I=(0, \infty)$, șirul $u_n(x)$ este convergent la $u_0=u(x_0)=0$. Într-adevăr pentru orice $\varepsilon>0$, va exista un $N(\varepsilon, x_0)$, astfel încît pentru $n>N(\varepsilon, x_0)$ să avem satisfăcută inegalitatea:

$$|u_n(x_0)-u(x_0)|<\varepsilon$$

Să determinăm rangul $N(\varepsilon, x_0)$. Din:

$$\left|\frac{x_0}{x_0+n}-0\right|<\varepsilon \quad \text{sau} \quad \left|\frac{x_0}{x_0+n}\right|<\varepsilon$$

rezultă:

$$\frac{x_0+n}{x_0}>\frac{1}{\varepsilon}, \quad x_0+n>\frac{x_0}{\varepsilon}, \quad n>\frac{x_0}{\varepsilon}-x_0$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, dacă notăm cu $N(\varepsilon, x_0) = \left[\frac{x_0}{\varepsilon} - x_0\right]$, ([$a$] — partea întreagă a lui a), pentru orice $n > N(\varepsilon, x_0)$, inegalitatea (1.2.2) este satisfăcută. Deci şirul $u_n(x)$ este convergent în orice punct $x_0 \in (0, \infty)$, iar funcţia limită este identic nulă:

$$u(x) \equiv 0. \qquad x \in (0, \infty)$$

Scriem deci:

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0.$$

2.1.b. *Convergenţa uniformă.*

Definiţia 1.2.2. Fie $(u_n(x))$ un şir de funcţii definite pe $I \subset R$ cu valori în R. Şirul $(u_n(x))$ se numeşte *uniform convergent* la $u(x)$ pe $I_1 \subset I$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, se poate determina un rang $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice $x \in I_1$, este satisfăcută inegalitatea:

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$$

Comparînd această definiţie cu definiţia 1.2.1., constatăm că diferenţa dintre ele se referă la proprietatea rangului N de a depinde sau nu de punct (de x_0, în cazul nostru). Dacă acest rang depinde de punctul considerat $x_0 \in I$, convergenţa este punctuală, dacă el nu depinde de x_0, adică este acelaşi, oricare ar fi $x_0 \in I$, şirul de fucţii converge uniform la funcţia limită.

Criteriu de convergenţă uniformă. Fie $u_n(x)$ un şir de funcţii definite pe I cu valori în R şi $u(x)$ o funcţie definită pe $I_1 \subset I$ cu valori în R. Dacă există un şir de numere pozitive α_n convergent la zero astfel încît, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in I_1$,

$$|u_n(x) - u(x).| < \alpha_n$$

atunci şirul u_n converge uniform la $u(x)$.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă (α_n) este convergent la zero, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel că, pentru orice $n > N(\varepsilon)$

$$|\alpha_n - 0| < \varepsilon$$

Dar, cum putem scrie

$$|u_n(x) - u(x)| \leq |\alpha_n - 0| < \varepsilon$$

Scanned with OKEN Scanner

va rezulta că șirul $(u_n(x))$ converge uniform la $u(x)$.

Exemplu. Considerăm șirul

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \qquad x \in R$$

Observăm că

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0, \qquad x \in R$$

și deci $u(x) = 0$.

Aceasta înseamnă că:

$$|u_n(x) - 0| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin nx}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

Prin urmare, pentru orice $x \in R$, și orice $\varepsilon > 0$, inegalitatea de mai sus va fi satisfăcută, de îndată ce

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

adică $n > \left[\frac{1}{n}\right]$. (Rolul șirului α_n îl joacă acum șirul cu termenul general $\frac{1}{n}$). Așadar, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ și nedepinzînd de x, convergența șirului considerat la funcția $u(x) \equiv 0$ este uniformă.

Proprietăți ale șirurilor uniform convergente.

O problemă importantă care se pune în teoria șirurilor de funcții constă în a preciza cum se transmit unele proprietăți ale funcțiilor termeni ai șirului la funcția limită. În acest sens vom aminti, fără demonstrație, cîteva dintre aceste proprietăți.

1. Dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt continue în punctul $x_0 \in I_1 \subset I$ și șirul $(u_n(x))$ este uniform convergent pe I_1, atunci funcția limită $u(x)$ este continuă în $x_0 \in I_1$.

2. Dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt derivabile în $x_0 \in I_1$ și șirul derivatelor $(u'(x))$ este uniform convergen pe I_1, atunci funcția limită $u(x)$ este derivabilă în x_0 și:

$$\lim_{n \to \infty} u'(x_0) = u'(x_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Dacă funcţiile $u_n(x)$ sînt continue pe intervalul $[a, b] \subset I_1$ şi şirul $u_n(x)$ este uniform convergent pe I_1, atunci,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

Demonstraţiile acestor proprietăţi pot fi găsite, de exemplu, în [9].

2.2. *Serii de funcţii. Proprietăţi generale.*

Definiţia 1.2.3. Fie $(u_n(x))$ un şir de funcţii definite pe $I \subset R$ cu valori în R. Expresia

$$\sum_1^\infty u_n(x) \equiv u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1.2.3}$$

se numeşte *serie de funcţii.*

2.2.a. *Convergenţa punctuală a unei serii de funcţii.*

Considerăm $x_0 \in I$ un punct fixat. Înlocuim x cu x_0 în (1.2.3) şi obţinem seria numerică

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$$

Dacă această serie este convergentă vom spune că seria de funcţii $\sum_1^\infty u_n(x)$ este convergentă în punctul $x_0 \in I$. Aceasta înseamnă că şirul sumelor parţiale $(s_n(x_0))$ în care

$$s_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0)$$

este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = s(x_0)$$

unde prin $s(x_0)$ am notat limita şirului $(s_n(x_0))$.

Definiţia 1.2.4. Dacă şirul $(s_n(x))$ este convergent în orice punct $x \in I$ se spune că seria $\sum_1^\infty u_n(x)$ este convergentă punctual (în fiecare punct) pe I iar funcţia limită a acestui şir :

Scanned with OKEN Scanner

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

se numește suma seriei date pe mulțimea I și se scrie:

(1.2.4) $$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

Exemplu. Să se studieze convergența seriei:

$$\sum_1^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Este evident că termenii seriei sînt definiți pe R. Șirul sumelor parțiale pentru un x fixat are termenul general:

$$s_n(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Cum termenii din membrul al doilea formează o progresie geometrică de rație $\frac{1}{1+x^2}$, pentru $x\neq 0$, $\frac{1}{1+x^2}<1$ și deci:

$$s_n(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

Deci pentru $x\neq 0$, $s(x)=1+x^2$.
iar pentru $x=0$,

$$s(x)=0.$$

Așadar, funcția sumă există și este definită astfel:

$$s(x)=\begin{cases} 1+x^2 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Seria dată este, deci, convergentă punctual pentru orice $x\in R$.

2.2.b. *Convergența uniformă a unei serii de funcții.*

Definiția 1.2.5. Fie $\sum_1^\infty u_n(x)$ o serie de funcții definite pe I cu valori în R. Dacă pentru orice $x\in I_1\subset I$ șirul sumelor

parțiale $(s_n(x))$ este uniform convergent, vom spune că seria dată este uniform convergentă pe $I_1 \subset 1$.

Criterii de convergență uniformă.

1.2.1. *Criteriul lui Cauchy.* Seria $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ este uniform convergentă pe $I_1 \subset I$, dacă și numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$, $p \geqslant 1$ și orice $x \in I_1$, are loc inegalitatea:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

Fără a da demonstrația acestui criteriu, sugerăm doar că ea se bazează pe definiția convergenței uniforme a șirului sumelor parțiale (s_n), și că

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)|$$

Să aplicăm acest criteriu în studiul seriei:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad x \in R$$

Pentru orice x fixat, $x \in R$, putem scrie:

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| = \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} + \frac{1}{(n+2)^2 + x^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n+p)^2 + x^2} < \frac{n}{(n+1)^2 + x^2} < \frac{1}{n+1}$$

Dar, pentru $\varepsilon > 0$ prescris, avem: $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, de îndată ce $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Deci dacă luăm $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, care nu depinde de x, ne încadrăm în ipotezele criteriului lui Cauchy de unde va rezulta convergența uniformă a seriei date pentru orice $x \in I_1 \subset R$, x — finit).

Înainte de a formula un alt criteriu de convergență uniformă vom defini noțiunea de convergență absolută a unei serii de funcții.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.2.6. Seria de funcții $\sum^{\infty} u_n(x)$ se numește *absolut convergentă* dacă seria valorilor absolute: $\sum^{\infty} |u_n(x)|$ este convergentă.

Convergența absolută a unei serii de funcții poate fi locală (punctuală) sau uniformă. În acest din urmă caz vom spune că seria dată este absolut și uniform convergentă. Relația dintre convergența absolută și uniformă și convergența în sens obișnuit este analogă cu cea de la seriile numerice în sensul că o serie absolut și uniform convergentă este convergentă (punctual sau uniform).

1.2.2. *Criteriul lui Weierstrass.*

Dacă $\sum^{\infty} u_n(x)$ este o serie de funcții și $\sum^{\infty} \alpha_n$ este o serie numerică cu termeni pozitivi convergentă și dacă

$$|u_n(x)| \leqslant \alpha_n, \qquad n > n_0, \tag{1.2.5}$$

atunci seria $\sum^{\infty} u_n(x)$ este absolut și uniform convergentă.

Demonstrație. Dacă seria $\sum^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n \geqslant 0$ este convergentă, conform criteriului lui Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$, $n > N(\varepsilon)$ și $p \geqslant 1$, are loc inegalitatea:

$$|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar conform inegalităților (1.2.3), avem:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant |\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon$$

Or, această inegalitate atrage concluzia criteriului lui Cauchy, de unde deducem convergența absolută și uniformă a seriei $\sum^{\infty} u_n(x)$.

Exemplu. Fie seria

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

Aplicînd criteriul lui Weierstrass, vom putea scrie (1.2.5) sub forma:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{|\sin\ nx|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \qquad x \in R$$

Cum seria cu termenul general $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că seria din enunț este absolut și uniform convergentă.

2.2.c. *Proprietăți ale seriilor de funcții uniforme convergente.*

În cele ce urmează, vom enumera cîteva proprietăți ale seriilor de funcții uniform convergente, deosebit de importante în aplicații.

1. Dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt mărginite pe I și seria $\sum^{\infty} u_n(x)$ este uniform convergentă, pe $I_1 \subset I$, atunci funcția sumă $u(x)$ este mărginită pe I_1.

2. Dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt continue în punctul $x_0 \in I_1$ și seria $\sum^{\infty} u_n(x)$ este uniform convergentă pe I_1, atunci funcția sumă $u(x)$ este continuă în $x_0 \in I_1$.

Un rezultat mai general ca acesta afirmă că, dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt continue în toate punctele unui interval $[a, b] \subset I_1$, atunci și funcția sumă este continuă pe intervalul $[a, b]$.

3. Dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt derivabile în punctul $x_0 \in I_1$ seria $\sum^{\infty} u_n(x)$ este convergentă iar seria derivatelor $\sum^{\infty} u_n'(x)$ este uniform convergentă pentru $x \in I_1$, atunci funcția sumă $s(x)$ este derivabilă în x_0 și are loc formula

$$s'(x_0) = u_1'(x_0) + u_2'(x_0) + \ldots + u_n'(x_0) + \ldots$$

Proprietatea se extinde la orice $x \in (a, b) \subset I_1$, în care caz

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \quad x \in (a, b)$$

Se mai spune că seria $\sum^{\infty} u_n(x)$ poate fi derivată termen cu termen, seria derivatelor avînd ca sumă derivata sumei $s(x)$.

4. Dacă funcțiile $u_n(x)$ sînt continue pe $[a, b] \subset I_1$, iar seria $\sum^{\infty} u_n(x)$ este uniform convergentă pe I_1, atunci $s(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și are loc formula:

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_1(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Exprimată în alți termeni, această proprietate afirmă că o serie de funcții continue pe $[a, b]$, uniform convergentă, se poate integra termen cu termen, iar seria integralelor are ca sumă integrala sumei seriei date.

2.3. *Serii de puteri. Domeniu de convergență.*

Definiția 1 2.7. O serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ în care $u_n(x)$ are forma

$$u_n(x)=a_n x^n$$

cu $x\in R$ și (a_n) un șir de numere reale, se numește *serie de puteri* sau serie întreagă.

Numerele a_n, $n\in N$, se numesc *coefiții* seriei.

Prin urmare, o serie de puteri se scrie astfel:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0+a_1 x+\ldots+a_n x^n+\ldots \tag{1.2.6}$$

În raport cu seriile de funcții studiate pînă acum, seriile de puteri au unele proprietăți speciale care le fac deosebit de utile în practică.

O primă proprietate a seriei (1.2.6) constă în aceea că are cel puțin un punct de convergență. Acest punct este $x=0$, ceea ce este evident.

Problema care se pune este de a găsi și alte puncte de convergență. În acest sens, are loc următoarea propoziție:

Lemma 1.2.1 (*Abel*). Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă în punctul $x_0\neq 0$, ea este absolut convergentă pentru orice x cu proprietatea $|x|<|x_0|$.

Demonstrație. Din faptul că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, conform proprietății 4 a seriilor convergente, șirul $(a_n x_0^n)$ este convergent la zero și, deci, este mărginit. Există așadar, un număr $M>0$, astfel încît pentru orice n,

$$|a_n x_0^n|\leqslant M.$$

Dar atunci, pentru $x\in R$, putem scrie:

$$|a_n x^n| = |a_n x^n| \left|\frac{x_0^n}{x_0^n}\right| = |a_n x^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Cum, pentru $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, adică $|x| < |x_0|$, seria cu termenul general $M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este o serie geometrică convergentă, va rezulta, conform criteriului comparației, că seria cu termenul general $a_n x^n$ este absolut convergentă și, deci, convergentă.

Din această lemă rezultă că dacă seria (1.2.4) este convergentă într-un punct $x_0 \neq 0$, mulțimea de convergență punctuală a ei se extinde pentru orice x din intervalul deschis $(-|x_0|, |x_0|)$.

În mod natural se pune întrebarea cît de larg poate fi acest interval. Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

Teorema 1.2.2. O serie de puteri este sau absolut convergentă pe toată axa reală, sau există un număr $r > 0$, astfel încît seria este absolut convergentă pentru $|x| < r$ (dacă $r \neq 0$) și divergentă pentru $|x| > r$.

Demonstrație. Dacă seria este convergentă numai în punctul $x = 0$, atunci $r = 0$.

În cazul cînd există valori nenule pentru x_0, fie:

$$A = \left\{ (x_0) \;\middle|\; \sum_0^\infty a_n x_0^n - \text{convergentă} \right\}$$

Dacă A nu este mărginită, atunci pentru orice x există $x_0 \in A$, astfel că pentru $|x| < |x_0|$ seria converge absolut Deci, în acest caz, seria converge absolut pe toată dreapta. Dacă mulțimea A este mărginită, definim pe r ca fiind

$$r = \sup A$$

în cazul în care $|x| > r$ seria nu converge, deoarece există θ cu $r < \theta < |x|$, pentru care seria este divergentă. Pentru $|x| < r$, seria este absolut convergentă, deoarece există $x_0 \in A$, cu $|x| < |x_0| \leqslant r$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.2.8. Numărul r care satisface proprietățile din teorema precedentă se numește *rază de convergență* a seriei $\sum_0^\infty a_n x^n$.

1.2. *Criteriul Cauchy-Hadamard.*

Dacă $\sum_0 a_n x^n$ este o serie de puteri și există limita

$$\rho = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \text{ sau } \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

atunci raza de convergență r a seriei date este:

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } \rho = 0 \\ \dfrac{1}{\rho} & \text{dacă } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{dacă } \rho = +\infty \end{cases}$$

Demonstrație. Aplicăm criteriul rădăcinii seriei $\sum_0^\infty a_n x^n$. Vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho|x|$$

Dacă $\rho = 0$, seria converge pentru orice x finit oricît de mare deoarece $\rho|x| = 0 < 1$. Dacă $\rho = +\infty$, și $x \neq 0$, rezultă $\rho|x| = +\infty$ și seria este divergentă oricare ar fi $x \neq 0$. În fine, dacă ρ este finit, adică $0 < \rho < +\infty$, seria va fi convergentă de îndată ce $\rho|x| < 1$, adică $|x| < \frac{1}{\rho}$. Pentru $\rho|x| > 1$, adică $|x| > \frac{1}{\rho}$ seria va fi divergentă.

Aceleași concluzii se obțin dacă am folosi criteriul raportului. Lăsăm această parte a demonstrației în seama cititorului.

Observație. Din această teoremă rezultă că mulțimea de convergență a unei serii de puteri este intervalul deschis $(-r, r)$.

Scanned with OKEN Scanner

În exteriorul acestui interval, seria este divergentă. Teorema nu ne spune însă ce se întîmplă în extremităţile intervalului. De aceea, pentru a găsi mulţimea maximă a punctelor de convergenţă, mulţime care se mai numeşte şi *domeniu de convergenţă*. se cere studiată separat comportarea seriei în punctele $x=-r$ respectiv, $x=r$, adică trebuie studiată natura seriilor:

$$\sum_0^\infty a_n(-r)^n \quad \text{şi} \quad \sum_0^\infty a_n r^n.$$

Exemple. Să se determine domeniul de convergenţă pentru următoarele serii:

1. $$\sum_0^\infty n!\, x^n$$

Avem $a_n=n!$ şi, aplicînd criteriul lui Cauchy-Hadamard obţinem:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Rezultă $r=0$, şi deci singurul punct de convergenţă al seriei este $x=0$.

2. $$\sum_0^\infty x^n$$

Avem $a_n=1$ şi $\rho=\lim_{n\to\infty}1=1$, $r=\frac{1}{1}=1$. Prin urmare, seria dată, care este o serie geometrică de raţie x, este convergentă pentru $x\in(-1, 1)$.

În punctul $x=-1$, seria este oscilantă şi, deci, nu este convergentă; în $x=1$, seria are suma $+\infty$ şi este divergentă. De asemenea, ea este divergentă pentru $|x|>1$. Deci domeniul de convergenţă al seriei se reduce la intervalul deschis $(-1, 1)$.

3. $$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$$

În acest caz, $a_n=\frac{1}{n}$ şi se obţine:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Deci seria este convergentă pentru $x\in(-1, 1)$. Dar pentru $x=-1$, seria devine $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$, adică seria armonică alternată care este convergentă. Pentru $x=1$, seria se reduce la $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ (seria armonică) şi este divergentă. Aşadar, domeniul de convergenţă al seriei este mulţimea $[-1, 1)$.

4. $$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n!}$$

Avem $a_n=\frac{1}{n!}$ şi $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Rezultă $r=\frac{1}{\rho}=\infty$ şi, deci, seria este convergentă pentru orice $-\infty<x<\infty$, adică pe toată axa reală.

Operaţii cu serii de puteri. Dacă $\sum_0^\infty a_nx^n$ şi $\sum_0^\infty b_nx^n$ sînt două serii de puteri, atunci se pot defini suma lor şi produsul cu un scalar α, astfel:

$$\sum_0^\infty a_nx^n+\sum_0^\infty b_nx^n=\sum_0^\infty (a_n+b_n)x^n$$

$$\alpha\sum_0^\infty a_nx^n=\sum_0^\infty (\alpha a_n)x^n\ ,$$

În raport cu aceste două operaţii, mulţimea seriilor de puteri formează un spaţiu liniar peste corpul numerelor reale.

Convergenţa uniformă a seriilor de puteri.

Dacă raza de convergenţă punctuală a seriei $\sum_0^\infty a_nx^n$ este r, se poate demonstra că seria este uniform convergentă pe orice interval închis $[-a, +a]\subset(-r, r)$ cu $a<r$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația acestei afirmații se poate găsi în [16].

De exemplu, seria geometrică $\sum_0^\infty x^n$ va fi convergentă uniform pe orice subinterval $[-a, +a]$ cu $a<1$, iar seria $\sum^\infty \frac{x^n}{n!}$ va fi uniform convergentă pe orice interval $[-a, +a]$, cu a oricît de mare, dar finit.

Alte proprietăți ale seriilor de puteri.

1. Suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe domeniul de convergență uniformă al ei.

2. Prin derivarea termen cu termen a unei serii de puteri se obține o nouă serie de puteri care are aceeași rază de convergență ca și seria dată.

3. O serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$, seria nouă obținută avînd aceeași rază de convergență.

Exemplu. Considerăm seria:

$$1-x^2+x^4-x^6-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

Aceasta fiind o serie geometrică de rație $-x^2$, va avea raza de convergență $r=1$, iar suma ei va fi $\frac{1}{1+x^2}$. Deci:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots \tag{1.2.7}$$

Pentru orice $x \in [-a, +a] \subset (-1, 1)$, cu $a<1$, seria este uniform convergentă și, deci, funcția limită va fi continuă (și într-adevăr, $\frac{1}{1+x^2}$ este continuă pe $[-a, a]$). Derivînd seria, obținem:

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^n 2nx^{2n-1}+\ldots$$

Calculînd raza de convergență a acestei serii, găsim $r=1$, adică aceeași cu a seriei inițiale.

Să integrăm termen cu termen seria (1.2.7). Obținem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Raza de convergență a acestei serii este, de asemenea, egală cu 1.

2.4. *Serii Taylor și serii Mac Laurin.*

2.4.1. *Formula lui Taylor.*

Înainte de a deduce această formulă, amintim o teoremă din analiza matematică care se formulează astfel: dacă $f: [a, b] \to R$ are proprietățile: 1. este continuă pe $[a, b]$ și 2. este derivabilă pe (a, b), atunci există $c \in (a, b)$, astfel încît:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \tag{1.2.7}'$$

În particular, aplicînd formula de mai sus pe intervalul $[a, x]$ se obține:

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(\theta), \quad \theta \in (a, a+x) \tag{1.2.8}$$

Teorema de mai sus poartă numele de *teorema lui Lagrange*, iar formula (1.2.8), se numește *formula* lui Lagrange sau *formula creșterilor finite*. Sînt cunoscute consecințele acestei formule.

Sub o formă ușor modificată (1.2.7)' se scrie astfel:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(c)$$

O generalizarea a acestei formule este dată de următoarea teoremă:

Teorema 1.2.3. Fie $f: [a, b] \to R$ și $f^{(k)}(x)$, $k = \overline{0, n}$, derivatele sale. Dacă funcția f satisface condițiile:

1' $f(x), f^{(1)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ sînt continue pe $[a, b]$.

2' $f^{(n+1)}(x)$ există pe (a, b),

atunci, există $c \in (a, b)$, astfel încît:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f^{(1)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n \tag{1.2.9}$$

în care R_n se exprimă în funcție de $f^{(n+1)}(x)$, calculată în punctul c.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie numărul A definit prin relația:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f^{(1)}(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+A(b-a)^p,\ p\geqslant 1$$

Considerăm funcția auxiliară:

$$F(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}f^{(1)}(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f^{(2)}(x)+\ldots+$$

$$+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+A(b-x)^p$$

În baza ipotezelor 1') și 2'), ne convingem ușor că funcția $F(x)$ satisface următoarele condiții:

1''. $F(x)$ este continuă pe $[a, b]$,
2''. $F'(x)$ există pe (a, b) și:
3''. $F(a)=F(b)$

Rezultă că funcția $F(x)$ verifică ipotezele teoremei lui Rolle și, prin urmare, există $c\in(a, b)$ astfel încît:

(1.2.10) $$F'(c)=0.$$

Deoarece:

$$F'(x)=f'(x)-f^{(1)}(x)+\frac{(b-x)}{1!}f^{(2)}(x)-\frac{(b-x)}{1!}f^{(2)}(x)+\ldots+$$

$$+\frac{(b-x)^n}{n!}f_{(x)}^{(n+1)}-Ap(b-x)^{p-1}=$$

$$=\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-Ap(b-x)^{p-1}$$

condiția (1.2.10) ne conduce la:

$$\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)-Ap(b-c)^{p-1}=0$$

Prin urmare, valoarea constantei A trebuie să fie

$$A=\frac{(b-c)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(c).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, putem scrie :

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f^{(1)}(a)+\ldots+$$

(1.2.11)

$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n$$

în care

(1.2.12)

$$R_n=\frac{(b-a)^p\cdot(b-c)^{n-p+1}}{p\cdot n!}f^{(n+1)}(c)$$

Expresia (1.2.12) se numeşte *rest de ordin n.*

Există mai multe forme de exprimare a restului R_n în funcţie de valorile care se dau lui p. Astfel, dacă $p=n+1$, se obţine :

$$R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$$ (restul lui Lagrange).

dacă $p=1$,

$$R_n=\frac{(b-a)(b-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$$ (restul lui Cauchy), etc.

Formula (1.2.9) poartă numele de *formula lui Taylor* de ordin n. Observăm că pentru $n=1$, ea se reduce la formula lui Lagrange.

Aplicînd formula (1.2.9) pe intervalul $[a, x]\subset[a, b]$ obţinem

(1.2.13) $$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f^{(1)}(a)+\ldots\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n$$

în care

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)),\ 0<\theta<1.$$

Cu ajutorul acestei formule, putem exprima valoarea funcţiei f în punctul x, cu ajutorul valorilor acesteia şi ale derivatelor sale pînă la ordinul n, în punctul $x=a$.

Să notăm cu $P_n(x)$ expresia :

(1.2.14) $$P_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f^{(1)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

Scanned with OKEN Scanner

$P_n(x)$ se numeşte *polinomul Taylor* ataşat funcţiei f pe intervalul $[a, x]$. Cu ajutorul notaţiei de mai sus, formula (1.2.13) poate fi scrisă sub forma:

$$f(x)=P_n(x)+R_n.$$

Să observăm că dacă x se găseşte foarte aproape de punctul a, adică x se găseşte în vecinătatea lui a, am putea renunţa la termenul R_n, şi atunci am avea, aproximativ

$$f(x)\simeq P_n(x)$$

Această proprietate a funcţiei f este importantă în aplicaţii practice, deoarece ne spune că într-o vecinătate a punctului $x=a$, funcţia $f(x)$ poate fi aproximată printr-o funcţie polinomială de grad n.

2.4.2. *Formula lui Mac Laurin.*

Dacă în formula (1.2.13) punem $a=0$, se obţine:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f^{(1)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+ \tag{1.2.15}$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(x+1)!}f^{(n)}(\theta x),\ 0<\theta<1$$

Această expresie poartă numele de *formula lui Mac Laurin.*

Seria Taylor.

Să presupunem acum că funcţia $f:[a, b]\to R$ este indefinit derivabilă, adică posedă derivate finite de orice ordin $k\in N$. Astfel de funcţii sînt, de exemplu, funcţiile elementare.

Dacă $x\in[a, b]$, putem scrie formula (1.2.13) cu o infinitate de termeni în membrul al doilea:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots \tag{1.2.16}$$

Această expresie poartă numele de *seria Taylor* asociată funcţiei f pe intervalul $[a, x]$. Dacă utilizăm notaţia (1.2.14)

Scanned with OKEN Scanner

constatăm că suma parțială de rang n a seriei de mai sus este tocmai polinomul Taylor $P_n(x)$ și, deci, în cazul cînd (1.2.16) este convergentă, vom putea scrie :

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

unde toți termenii ce conțin derivatele de ordinul $k \geqslant n+1$ au fost înglobați în R_n. Convergența seriei (1.2.16) va fi asigurată de îndată ce

$$|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|<\varepsilon$$

pentru orice $n>N(\varepsilon, x)$ și $\varepsilon>0$ arbitrar.

Fără a intra în detalii, menționăm că o condiție suficientă pentru ca, inegalitatea de mai sus să fie posibilă, este ca toate derivatele funcției f, adică $f^{(k)}(x)$, $k \in N$, să fie mărginite în vecinătatea punctului $x=a$.

Observație. Expresia (1.2.16) se mai numește și *dezvoltarea* funcției f *în serie Taylor* în jurul valorii $x=a$.

Exemplu. Să se dezvolte funcția $f=e^x$, în serie Taylor în jurul valorii $x=-1$.

Prin urmare, dezvoltarea Taylor a funcției f se va exprima cu ajutorul puterilor binomului $(x+1)$. Vom avea mai întîi :

$$f^{(1)}(x)=e^x,\ f^{(2)}(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=e^x,$$

și apoi

$$f^{(1)}(-1)=e^{-1},\ f^{(2)}(-1)=e^{-1} \ldots f^{(n)}(-1)=e^{-1}$$

Deci :

$$e^x=\frac{1}{e}+\frac{x+1}{1!}\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^2}{\cdot 2!}\frac{1}{e}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n!}\frac{1}{e}+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{e}\left(1+\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n!}+\ldots\right)$$

Seria Mac Laurin.

Dacă în (1.2.16) punem $a=0$, se obține :

$$(1.2.17)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f^{(1)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această expresie poartă denumirea de *seria Mac Laurin* asociată funcției $f(x)$. Notînd:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{1.2.18}$$

constatăm că (1.2.17) apare ca o serie de puteri:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1.2.19}$$

cea ce ne dă, în cazul cînd seria din membrul al doilea este convergentă funcția $f(x)$ ca sumă a unei astfel de serii. Din acest motiv, (1.2.19) se numește *dezvoltarea* funcției f în în serie de puteri. În consecință, problema convergenței punctuale, a convergenței uniforme, etc. se vor trata în aceeași manieră ca pentru seriile de puteri.

2.5. *Dezvoltări în serii de puteri.*

În cele ce urmează vom considera cîteva funcții elementare și vom construi dezvoltările lor în serie de puteri.

1. Fie $f(x) = e^{ax}$, $x \in R$,

Pentru a afla coeficienții seriei (1.2.19), calculăm derivatele funcției f. Avem:

$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{ax}; && f(0) = 1\\
&f^{(1)}(x) = ae^{ax}; && f^{(1)}(0) = a\\
&f^{(2)}(x) = a^2 e^{ax}; && f^{(2)}(0) = a^2\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}; && f^{(n)}(0) = a^n\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Așadar, conform cu (1.2.18):

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a^n}{n!}$$

Prin urmare, vom avea:

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + \ldots + \frac{(ax)^n}{n!} + \ldots \tag{1.2.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate constată lesne că raza de convergență a acestei serii este $r=\infty$ și, deci, ea este convergentă punctual pentru orice $x\in R$. În particular, pentru $a=1$, din (1.2.20) se obține dezvoltarea funcției e^x.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

În mod natural, se pune problema erorii pe care o facem atunci cînd dorim să aproximăm valorile funcției e^x în diverse puncte, reținînd numai un număr finit de termeni din dezvoltarea de mai sus. Or, această eroare este dată de

$$\left|e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\right|=|R_n|$$

în care R_n poate fi exprimat, de exemplu, prin restul Lagrange Astfel, vom avea

$$|R_n|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1$$

În particular, pentru $x=1$, $e<3$ și vom avea:

$$R_n<\frac{3}{(n+1)!}$$

expresie pe care am amintit-o în evaluarea numărului e

2 Fie funcțiile $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$, $x\in R$ Pentru a deduce dezvoltările în serie Mac Laurin ale acestor funcții vom pune în (1.2.20) $a=i=\sqrt{-1}$ și vom folosi formula lui Euler: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Avem:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\ldots+$$

$$+\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{i(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Separînd aici partea reală de partea imaginară, vom obține:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

3. Considerăm funcția $f(x)=(1+x)^m$, $m \in R$. Se poate demonstra prin inducție matematică că derivata de ordin k a funcției f este dată de:

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2) \ldots (m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

Deci, vom avea:

$$f(0)=1,\ f^{(1)}(0)=m,\ \ldots,\ f^{(k)}(0)=m(m-1) \ldots (m-k+1)$$

Prin urmare, dezvoltarea în serie a funcției f va fi următoarea:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!} x^n + \ldots. \tag{1.2.21}$$

Seria (1.2.21) se numește *seria binomială.*

În particular, pentru $n=2$, și $m=1$, $m=\frac{1}{2}$ și $m=-\frac{1}{2}$, se obțin formulele de aproximare:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul. 2. *FUNCȚII REALE DE n VARIABILE REALE*

§. 1. PRELIMINARII

1.1. *Spațiul euclidian* R^n.

S-a văzut în partea I-a a acestui curs (cap. II) că mulțimea sistemelor ordonate de n numere reale, de forma

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in R, \; i=\overline{1, n}$$

are structură de spațiu liniar peste corpul numerelor reale. Pentru moment, vom nota cu V_n acest spațiu. Elementele din V_n se numesc vectori n-dimensionali. Pe lîngă operațiile de adunare a vectorilor și de înmulțire cu un scalar, proprii structurii de spațiu liniar, în mulțimea V_n se poate defini și o a treia operație, de înmulțire a doi vectori, prin care unei perechi de vectori i se asociază un scalar.

Definiția 2.1.1. Fie $X=(x_1, x_2, .., x_n)$ și $Y=(y_1, y_2, \ldots y_n)$ doi vectori din V_n. Se numește *produs scalar* al elementelor X și Y, numărul real $<X, Y>$ dat de formula:

$$<X, Y>=x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Produsul scalar are următoarele proprietăți:

1. $<X,Y>=<Y, X>$,
2. $<Y_1+X_2,Y>=<X_1,Y>+<X_2,Y>$,
3. $<\lambda X,Y>=\lambda<X,Y>$,
4. Dacă $X\neq\theta$, $\theta=(0,0\ldots,0)$, atunci $<X,X>0$.

Cu ajutorul produsului scalar se poate defini norma sau lungimea unui vector din V_n.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.1.2. Pentru orice $X \in V_n$, numărul real nenegativ $\|X\|$ avînd expresia

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

se numește norma (sau lungimea vectorului X).

Norma are următoarele proprietăți:

1′ $\|X\| > 0$ și $\|X\| = 0$ dacă și numai dacă $X = \theta$,

2′ $$\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|,$$

3′ $$\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|.$$

Elementele lui V_n pot fi numite și *puncte* ale acestui spațiu. Dacă $X = (x_1\ x_2 \ldots x_n)$, $X \in V_n$, numerele $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ se vor numi coordonatele lui X. Pentru a arăta că punctul X are coordonatele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ scriem

$$X(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Definiția 2.1.3. Pentru orice pereche de puncte $X, Y \in V_n$ numărul real nenegativ $d(X, Y)$ dat de formula

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{2.1.1}$$

se numește *distanța* dintre punctele X și Y.

Numărul $d(X, Y)$ are următoarele proprietăți:

1″ $d(X, Y) = 0$ dacă și numai dacă $X = Y$,

2″ $$d(X, Y) = d(Y, X),$$

3″ $$d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z).$$

Mulțimea V_n în care s-a introdus noțiunea de produs scalar, norma și distanța prin formula (2.1.1) poartă numele de spațiu euclidian real n-dimensional și se notează cu R^n.

Observăm că R^n poate fi privit și ca mulțimea produs cartezian a mulțimii numerelor reale R, cu ea însăși de n ori:

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in R,\ i = \overline{1, n}\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, $R^1 = R$ și se identifică cu mulțimea punctelor unei drepte. Dacă pe această dreaptă ne alegem un punct 0, un segment unitate și o orientare obținem o axă de coordonate, (fig. 2.1.1. a). Oricărui punct P îi putem asocia numărul real x și reciproc. Numărul x se numește abscisa sau *coordonata* lui P.

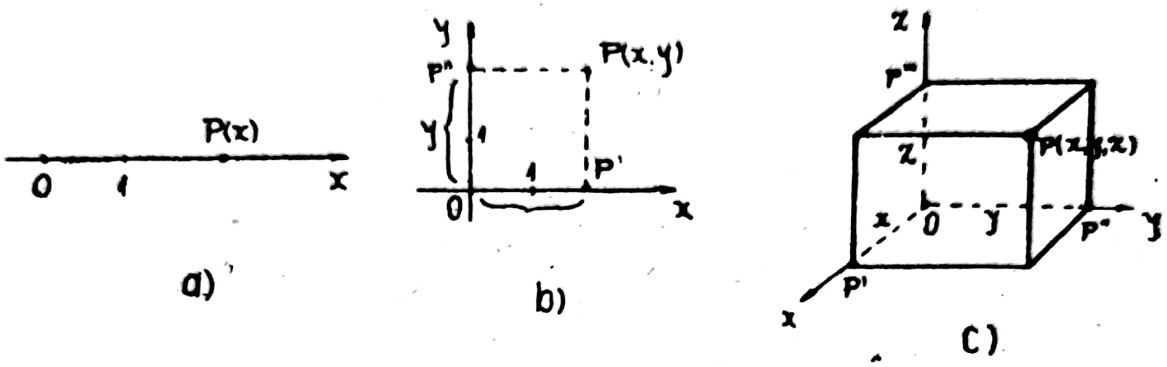


Fig. 2.1.1.

Distanța dintre punctele $P_1(x_1)$ și $P_2(x_2)$ este dată de :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|. \tag{2.1.2}$$

Așadar, spațiul euclidian R^1 are ca imagine geometrică dreapta euclidiană.

Spațiul R^2 format din mulțimea perechilor ordonate (x, y) de numere reale are ca imagine geometrică planul euclidian. Pentru a ne convinge de aceasta, să considerăm într-un plan două axe de coordonate perpendiculare care se intersectează în punctul O astfel ca segmentele lor unitate să fie egale. Notăm cu Ox și Oy aceste axe. Axa Ox se numește *axa absciselor*, axa Oy — axa *ordonatelor*. Fie P un punct din plan. Ducînd paralele la axele de coordonate determinăm punctele $P' \in Ox$ și $P'' \in Oy$, (fig. 2.1.1.b). Fie x coordonata lui P' și y coordonata lui P''. Punctului P îi putem atașa perechea ordonată (x, y) care este un element al spațiului R^2

Reciproc, fiind dată o pereche (x, y) de numere reale putem construi în plan un punct care să aibă ca abscisă pe x și ca ordonată pe y. Corespondența dintre mulțimea perechilor ordonate (x, y) și mulțimea punctelor dintr-un plan în care s-a definit un sistem de coordonate este deci biunivocă. Dacă $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ sînt două puncte din acest plan, distanța dintre ele va fi dată de :

(2.1.3) $d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Spațiul R^3 este spațiul tuturor tripletelor ordonate (x, y, z) de numere reale. Imaginea geometrică a lui R^3 este spațiul euclidian tridimensional.

Într-adevăr să considerăm trei axe Ox, Oy, și Oz reciproc perpendiculare care se intersectează în punctul O și pe care am ales segmentele lor unitare, egale. Se obține astfel un sistem de coordonate carteziene ortogonale. Planele yOz, xOz și xOy se numesc *plane de coordonate*. Fie P un punct din spațiu. Ducînd prin P plane paralele cu planele de coordonate, ele vor intersecta Ox în P', Oy în P'' și Oz în P'''. Dacă x este coordonata lui P' pe Ox, y — coordonata lui P'' pe Oy și z coordonata lui P''' pe Oz (fig. 2.1.1.c), punctului P i se asociază tripletul ordonat (x, y, z) de numere reale. Numerele x, y, z se numesc coordonatele carteziene ale lui P. Numărul x se numește *abscisă*, y *ordonată* iar z *cota* lui P. Reciproc, dacă se dă tripletul ordonat (x, y, z) vom putea construi un paralelipiped cu un vîrf în origine și cu alte trei vîrfuri în punctele P', P'' și P''', de coordonate respective x, y și z pe axele Ox, Oy și Oz. Vîrful P opus lui O *va avea coordonatele* (x, y, z). Se observă astfel că între punctele P din spațiul euclidian și tripletele ordonate (x, y, z) de numere reale se stabilește o corespondență biunivocă. Dacă $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sînt două puncte din spațiu, distanța dintre ele va fi dată de formula:

(2.1.4) $d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

Observăm că formulele (2.1.2), (2.1.3) și (2.1.4) sînt cazuri particulare ale formulei (2.1.1) care dă distanța dintre două puncte în R^n.

1.2. *Mulțimi în* R^n.

În cele ce urmează vom defini cîteva noțiuni de teoria mulțimilor în R^n strict necesare pentru studiul funcțiilor de n variabile.

Definiția 2.1.4. Fie $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, un punct din R^n și $r>0$ un număr real dat. Se numește *domeniu sferic n dimensional deschis* avînd centrul în P_0 și raza r, mulțimea:

$$S_n(P_0, r)=\{P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid d(P, P_0)<r\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă condiția $d(P, P_0) < r$ se înlocuiește cu $d(P, P_0) \leqslant r$, mulțimea respectivă va fi numită *domeniu sferic n dimensional închis* și o vom nota cu $\bar{S}_n(P_0, r)$.

În $R^1 \equiv R$, mulțimea $S_1(P_0, r)$ se identifică cu mulțimea punctelor din intervalul deschis $(x_0 - r, x_0 + r)$ iar $\bar{S}_1(P_0, r)$ cu mulțimea punctelor din intervalul $[x_0 - r, x_0 + r]$.

În R^2, mulțimea $S_2(P_0, r)$ este formată din totalitatea punctelor interioare circumferinței de rază r, cu centrul în $P_0(x_0, y_0)$. Această mulțime va fi numită *disc circular deschis*, iar $\bar{S}_2(P_0, r)$ — *disc circular închis*.

În R^3, mulțimea $S_3(P_0, r)$ este alcătuită din toate punctele situate în interiorul sferei de rază r cu centrul în $P_0(x_0, y_0, z_0)$, iar $\bar{S}_3(P_0, r)$ este formată din toate punctele interioare sferei, inclusiv cele de pe sferă. Imaginile acestor mulțimi sînt redate în fig. 2.1.2 (a, b, c, a′, b′, c′).

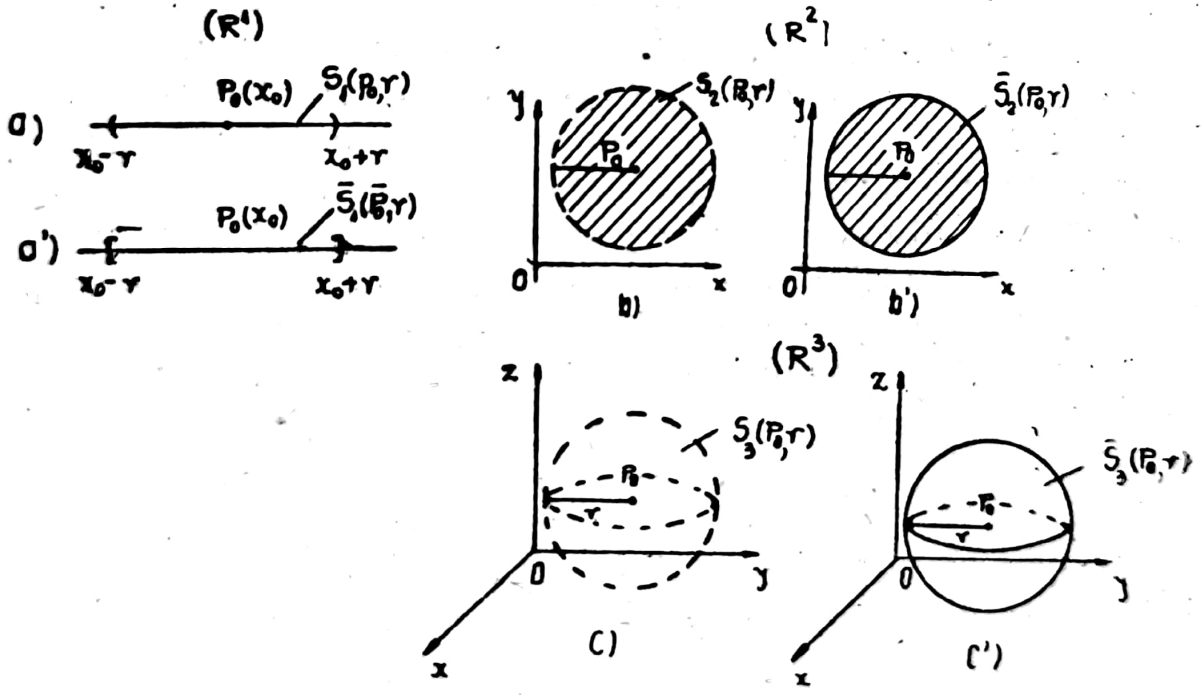


Fig. 2.1.2.

Definiția 2.1.5. Se numește *interval n dimensional deschis* mulțimea:

$$E_n = \{P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i,\ a_i < b_i,\ i = \overline{1, n}\}$$

Dacă în definiția de mai sus condițiile $a_i < x_i < b_i$ se înlocuiesc cu $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, mulțimea respectivă se numește *interval n dimensional închis* și o vom nota cu $\bar{E}_n$.

În R^1, E_1 se identifică cu mulțimea punctelor intervalului (a, b) iar $\bar{E}_1$, cu mulțimea punctelor intervalului $[a, b]$. În R^2, mulțimea E_2 este formată din toate punctele interioare unui dreptunghi cu laturile paralele axelor de coordonate, iar $\bar{E}_2$ va conține și punctele de pe laturile dreptunghiului.

În R^3, E_3 se reprezintă mulțimeu punctelor interioare unui paralelipiped cu muchiile paralele cu axele de coordonate. Mulțimea $\bar{E}_3$ va conține și punctele de pe fețele și muchiile acestui paralelipiped. Imaginile geometrice ale acestor mulțimi sînt redate în fig. 2.1.3, (a, b, c, a′, b′, c′).

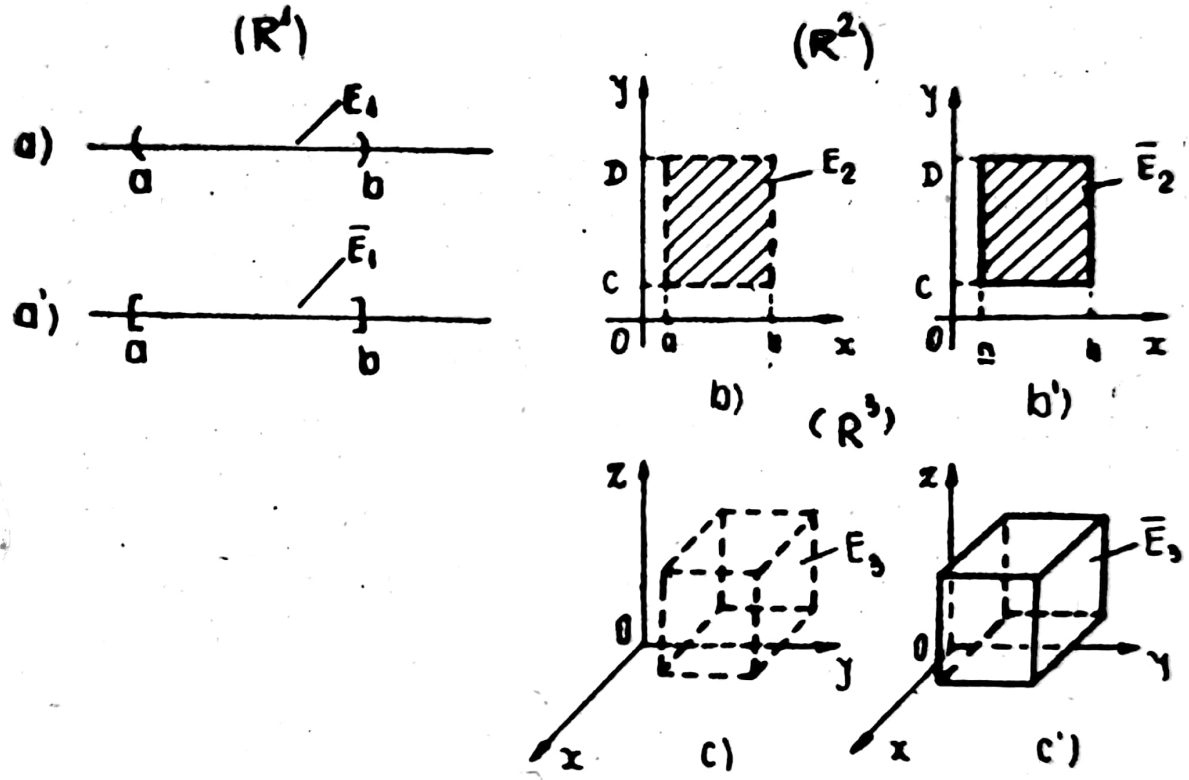


Fig. 2.1.3.

Adesea, se consideră intervale n dimensionale avînd centrul într-un anumit punct $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Vom nota cu $E_n(P_0)$ un astfel de interval. Așadar,

$$E_n(P_0)=\{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,||x_i - x_i^0|<a_i,\ i=\overline{1, n}\}$$

Dacă este posibil ca $|x_i - x_i^0| \leqslant a_i$, vom vorbi de un interval închis cu centrul în P_0 și-l vom nota cu $\bar{E}_n(P_0)$.

În cazul cînd $a_1 = a_2 = \ldots a_n = a$, mulțimea

Scanned with OKEN Scanner

$$E_n(P_0)=\{P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,|\,|x_i-x_i^0|<a,\ i=\overline{1,\ n}\}$$

se va numi *cub n dimensional deschis*, iar dacă $|x_i-x_i^0|\leqslant a$, mulțimea respectivă se va numi *cub n dimensional închis*. Imaginile acestor mulțimi sînt similare aceleia din fig. 2.1.3 *a*, *b*, *c* *a'*, b', *c'*, cu deosebirea că laturile sînt egale iar centrele mulțimilor se găsesc într-un punct dat P_0.

Definiția 2.1.6. O mulțime $A\subset R^n$ se numește *mărginită* dacă se poate găsi un interval *n* dimensional $E_n\subset R^n$ care să o conțină adică, $A\subset E_n$.

În caz contrar, mulțimea *A* se va numi *nemărginită*. De exemplu, în plan o mulțime va fi mărginită dacă poate fi inclusă într-un dreptunghi de dimensiuni finite și va fi nemărginită dacă nu vom găsi nici un astfel de dreptunghi care să o cuprindă. Mulțimea *A* din fig. (2.1.4 a), este mărginită, pe cînd mulțimea *A* din fig. (2.1.4 b) este nemărginită.

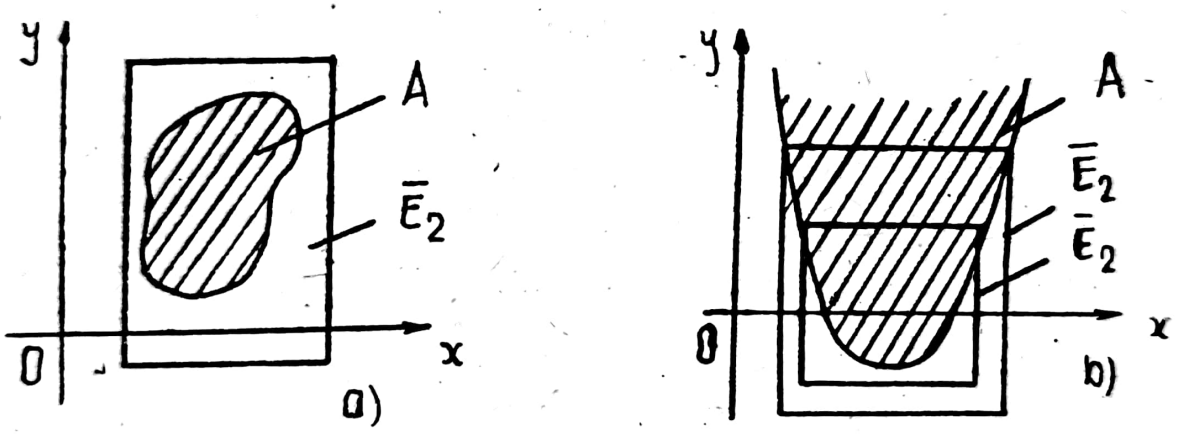


Fig. 2.1.4.

Definiția 2.1.7. Fie $P_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ un punct din R^n și $\varepsilon<0$, un număr real arbitrar. Se numește *vecinătate a punctului* P_0, un domeniu sferic *n* dimensional deschis cu centrul în P_0 de rază ε :

$$V_n(P_0,\ \varepsilon)=\{P(x_1,x_2,\ldots,\ x_n)\,|\,d(P,\ P_0)<\varepsilon\}$$

Drept vecinătăți ale punctului P_0 pot fi considerate, de asemenea, și intervalele *n* dimensionale deschise avînd centrul în P_0.

Definiția 2.1.8. Fie *A* o mulțime de puncte din R^n ($A\subset R^n$). Spunem că punctul $P_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ este *interior*

mulțimii A dacă există o vecinătate $V_n(P_0, \varepsilon)$ a acestui punct astfel încît $V_n(P_0, \varepsilon) \subset A$.

Definiția 2.1.9. Dacă A este o mulțime din R^n și $P \in R^n$, se spune că P este *punct de acumulare* al mulțimii A dacă orice vecinătate a sa conține cel puțin un punct $M \in A$ și $M \neq P$.

Ca și în cazul mulțimilor de numere reale, punctele de acumulare ale unei mulțimi din R^n pot să aparțină sau nu, mulțimii :

Definiția 2.1.10. O mulțime $A \subset R_n$ care conține toate punctele sale de acumulare se numește *mulțime închisă.*

Spre exemplu, în R^3, paralelipipedul cu centrul în origine

$$A = \{(x, y, z) | x | \leqslant a, \ |y| \leqslant b, \ |z| \leqslant c\}$$

este o mulțime închisă.

Observație. Operațiile de reuniune, intersecție, diferență și complementara unei mulțimi în R^n se definesc în mod analog celor din teoria abstractă a mulțimilor.

1.3. *Șiruri în* R^n.

Să presupunem că fiecărui număr natural k i se pune în corespondență într-un mod unic un punct $P_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in R^n$. Dînd lui k valorile 1, 2, ..., k, ... se obține șirul de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ din R^n. Vom nota cu $(P_k)_{k \in N}$, sau pe scurt (P_k) un astfel de șir. Șirului (P_k) îi corespund n șiruri $(x_1^{(k)})$, $(x_2^{(k)}), \ldots, (x_n^{(k)})$ formate de coordonatele de același nume ale șirului $(P_k) : P_k(x_1^{(k)}, x_n^{(k)}, x_n^{(k)})$. Numim aceste șiruri, *șirurile coordonatelor.*

Definiția 2.1.11. Fie (P_k) un șir din R^n și $P_0(x_1^0 x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$. Spunem că șirul (P_k) *converge la* P_0 dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$, există un rang $k(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $k > k(\varepsilon)$, distanța dintre punctul P_k și P_0 este mai mică decît ε :

$$(2.1.5) \quad d(P_k, P_0) = \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - x_n^0)^2} < \varepsilon$$

Punctul P_0 se numește *limita* șirului (P_k) și se notează :

$$\lim_{k \to \infty} P_k = P_0$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece oricare dintre diferențele de sub radicalul (2.1.5) luate în valoare absolută este mai mică decît radicalul însuși, rezultă că pentru $k > k(\varepsilon)$ sînt satisfăcute inegalitățile:

$$|x_1^{(k)} - x_1^0| < \varepsilon, \quad |x_2^{(k)} - x_2^0| < \varepsilon, \ldots, |x_n^{(k)} - x_n^0| < \varepsilon$$

Prin urmare, dacă șirul (P_k) este convergent la P_0, atunci șirurile $(x_1^{(k)})$, $(x_2^{(k)})$..., $(x_n^{(k)})$, adică șirurile coordonatelor sînt convergente, limitele lor fiind chiar coordonatele lui P_0:

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)} = x_1^0, \quad \lim_{k\to\infty} x_2^{(k)} = x_2^0, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n^0$$

Se poate dovedi că și reciproca acestei afirmații este, de asemenea adevărată. Fiind date n șiruri: $(x_1^{(k)})$, $(x_2^{(k)})$, ..., $(x_n^{(k)})$ cu proprietatea

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}$$

atunci șirul $P_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in R^n$ este convergent și limita sa este punctul P_0 $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Într-adevăr, din convergența șirurilor $(x_1^{(k)}) \ldots, (x_n^{(k)})$ rezultă că pentru orice $\varepsilon < 0$, există în fiecare șir un rang $K_1(\varepsilon)$, $K_2(\varepsilon)$, ..., $K_n(\varepsilon)$, astfel încît pentru $k > K_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, au loc inegalitățile:

$$|x_1^{(k)} - x_1^0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad |x_2^{(k)} - x_2^0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ldots, |x_n^{(k)} - x_n^0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Ținînd seama de aceste inegalități, deducem că pentru $k > K(\varepsilon) = \max(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ vom avea

$$d(P_k, P_0) = \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - x_n^0)^2} < \varepsilon$$

ceea ce, conform definiției 2.1.11. înseamnă că șirul (P_k) este convergent, limita sa fiind punctul P_0.

Exemplu. Șirul $\left(P_k\left(1 + \frac{1}{k}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{k}\right)\right) \subset R^2$ este convergent și limita sa este punctul $P_0(1, 2)$.

Pentru a dovedi aceasta, fie $\varepsilon > 0$, un număr oricît de mic. Avem:

$$d(P_k, P_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{k}\right)^2} = \frac{2}{k}$$

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea $\frac{2}{k}<\varepsilon$ fiind satisfăcută pentru toţi indicii k, pentru care $k>k(\varepsilon)=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, rezultă că:

$$\lim_{k\to\infty} P_k=P_0$$

Pe de altă parte, considerînd şirurile cu termenii generali

$$x_1^{(k)}=1+\frac{1}{k},\quad x_2^{(k)}=2+\frac{\sqrt{3}}{k},$$

în care

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{(k)}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_2^{(k)}=\lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{3}}{k}\right)=2$$

şi formînd şirul $P_k(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)})$, vom avea, evident.

$$\lim_{k\to\infty} P_k\ (x_1^{(k)},\ x_2^{(k)})=(1,\ 2)$$

adică

$$\lim_{k\to\infty} P_k=P_0$$

§.2. FUNCŢII REALE DE n VARIABILE REALE

2.1. *Generalităţi.*

Amintim că dacă E şi F sînt două mulţimi de numere reale ale căror elemente le notăm respectiv cu x şi y, o corespondenţă care asociază fiecărui $x\in E$, un singur număr $y\in F$, poartă numele de funcţie reală de o variabilă reală şi se notează $y=f(x)$ sau $f: E\to F$. Mulţimea E se numeşte domeniu de definiţie al funcţiei, f — legea de corespondenţă, iar F mulţimea în care funcţia ia valori.

În cele ce urmează vom defini noţiunea de funcţie de două sau mai multe variabile.

Să considerăm pentru început un exemplu. Fie E mulţimea dreptunghiurilor din plan de dimensiuni x şi y în care $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ şi mulţimea:

Scanned with OKEN Scanner

$$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$$

Un element al mulțimii E este deci un dreptunghi definit printr-o pereche ordonată de numere $(x, y)\in D$ și reciproc. Aria A a acestui dreptunghi este dată de $A=xy$. Pentru un dreptunghi (x, y) dat, numărul A este un număr real unic determinat. Așadar putem stabili o corespondență prin care fiecărui element din D i se asociază numărul real unic A prin operația de înmulțire a lui x cu y.

2.2. *Funcții de două variabile*

Definiția 2.2.1. Fie D o mulțime din R^2 și I o mulțime de numere reale ($I\subset R$). O corespondență prin care fiecărei perechi $(x, y)\subset D$ i se asociază printr-o anumită lege un număr real unic $u\in I$, poartă numele de *funcție reală de variabilele* x *și* y.

Se notează $u=f(x, y)$ sau $u=f(P)$ unde P este punctul din plan ale cărui coordonate sînt numerele x și y. Numerele x și y se numesc *argumentele* funcției sau *variabilele independente*. Dacă perechii (x_0, y_0) îi corespunde numărul $u_0\in I$ adică $u_0=f(x_0, y_0)$, spunem că u_0 este valoarea funcției f în punctul $P_0(x_0, y_0)$. Mulțimea D se numește *domeniu de definiție (de existență)* al funcției, iar I — mulțimea în care funcția ia valori.

Exemple.

1. Funcția $f(x, y)=x^2+y^2$ este definită în tot planul, deci $D=R^2$, deoarece oricărei perechi $(x, y)\in R^2$ îi corespunde o valoarea bine determinată pentru f. De exemplu, în punctul $(1, 2)$, $f(1, 2)=5$. Mulțimea valorilor funcției este R^+.

2. Funcția $u=lnxy$ este definită numai pentru acele valori ale lui x și y pentru care produsul $xy>0$, deci:

$$D=\{(x, y)\in R^2|xy>0\}$$

Mulțimea D este alcătuită din punctele cadranelor unu și trei cu excepția punctelor de pe axele Ox și Oy. Mulțimea valorilor funcției este R.

3. Funcția $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, are ca domeniu de definiție mulțimea:

Scanned with OKEN Scanner

$$D=\{(x,\ y)\in R^2 | x^2+y^2\leqslant 1\}$$

Mulțimea valorilor funcției este $[0,\ +\infty)$.

2.3. *Imaginea geometrică a unei funcții de două variabile.* Fie $z=f(x,\ y)$, o funcție definită într-un domeniu $D\in R^2$. Considerăm un sistem de trei axe rectangulare $Oxyz$ și figurăm domeniul D în planul xOy. Valorile funcției le vom plasa pe axa Oz. Să presupunem că mulțimea D este mărginită.

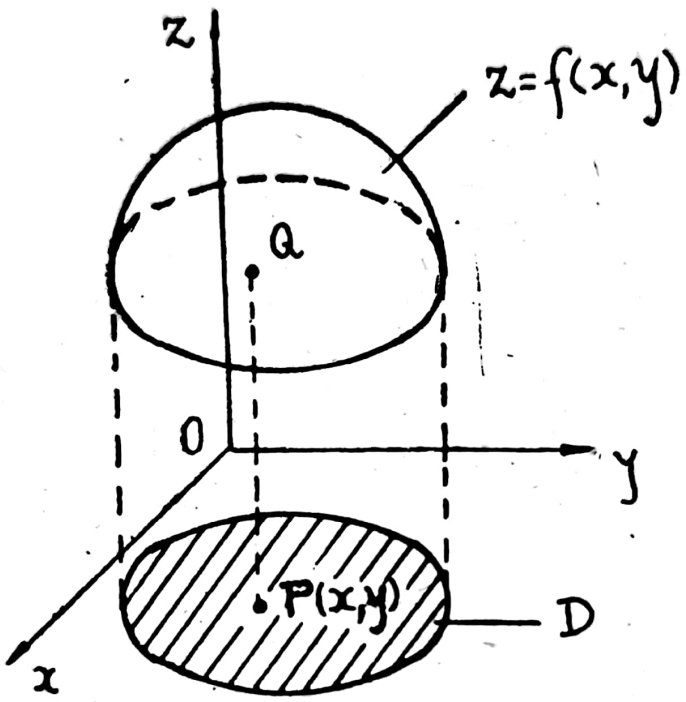


Fig. 2.2.1.

Din fiecare punct $P(x,\ y)\in D$, ridicăm o perpendiculară pe planul xOy și luăm pe aceasta un segment avînd lungimea egală cu valoarea funcției în punctul (x,y); Fie Q punctul din spațiu ale cărui coordonate sînt numerele x, y, și $z=f(x,\ y)$: $Q(x,\ y,\ f(x,\ y))$. Dacă $z>0$ punctul Q se va afla deasupra planului xOy. iar dacă $z<0$, punctul Q se va găsi sub planul xOy.

Să presupunem că valorile funcției sînt toate pozitive. Operația pe care am efectuat-o în punctul P o repetăm în toate punctele domeniului D. Totalitatea punctelor $Q(x,\ y,\ z)$ din spațiu alcătuiesc o figură geometrică care se numește *suprafață*. O vom numi suprafața $z=f(x,\ y)$ (fig. 2.2.1). Prin analogie cu ceea ce numim graficul unei funcții de o variabilă reală (adică mulțimea tuturor punctelor $(x,\ f(x))$ care în planul xOy se reprezintă printr-o curbă) putem spune că suprafața definită de punctele $Q(x,\ y,\ f(x,\ y))$ reprezintă graficul funcției de două variabile $z=f(x,\ y)$.

Dacă funcția $f(x,\ y)$ are forma particulară $f(x,\ y)=ax+by+c$, graficul funcției $z=ax+by+c$, este un plan care taie

axele de coordonate în punctele $A(-c/a, 0, 0)$, $B=(0, -c/b, 0)$ $C=(0, 0, 1/c)$. Dacă $a, b, c, >0$ poziția acestui plan față de sistemul de axe $Oxyz$, este cea din fig. 2.2.2.

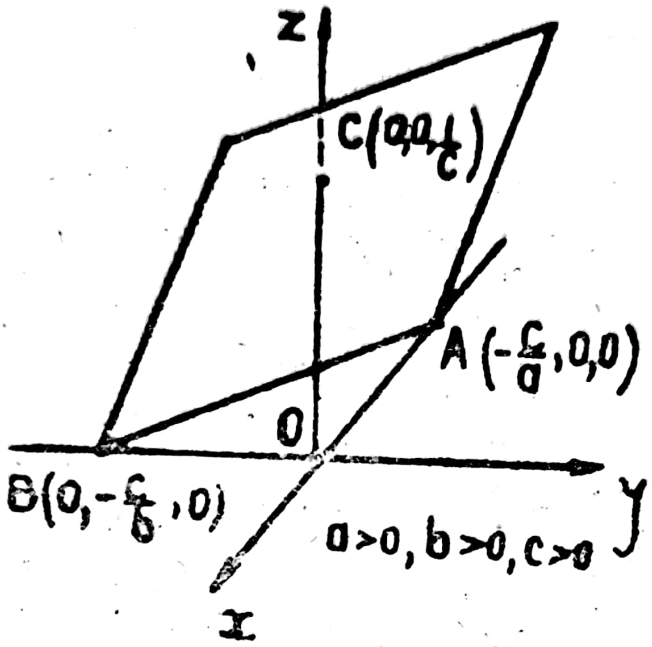


Fig. 2.2.2.

În particular $x=a$ (const.) este un plan paralel cu planul yOz situat la distanța a de acesta, $y=b$ (const.) este un plan paralel cu planul xOz situat la distanța b de acest plan, iar $z=c$ (const.), este un plan paralel cu planul xOy, situat la distanța c de acesta (fig. 2.2.3 *a.b.c.*)

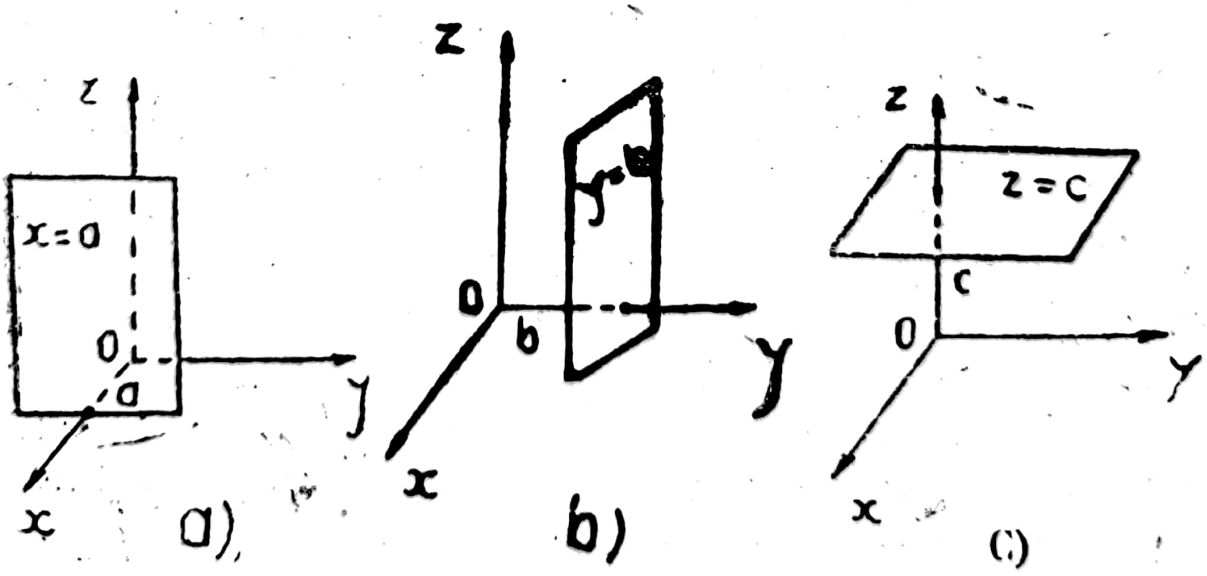


Fig. 2.2.3.

2.4. *Secțiuni plane (curbe de nivel și secțiuni verticale)*

Nu întotdeauna ne putem imagina forma suprafeței care corespunde unei funcții date. Pentru a ne putea da seama de modul în care variază funcția fără a cunoaște graficul ei vom intersecta suprafața cu plane convenabil alese. Curbele care se obțin astfel în planele de secțiune se numesc *secțiuni plane*.

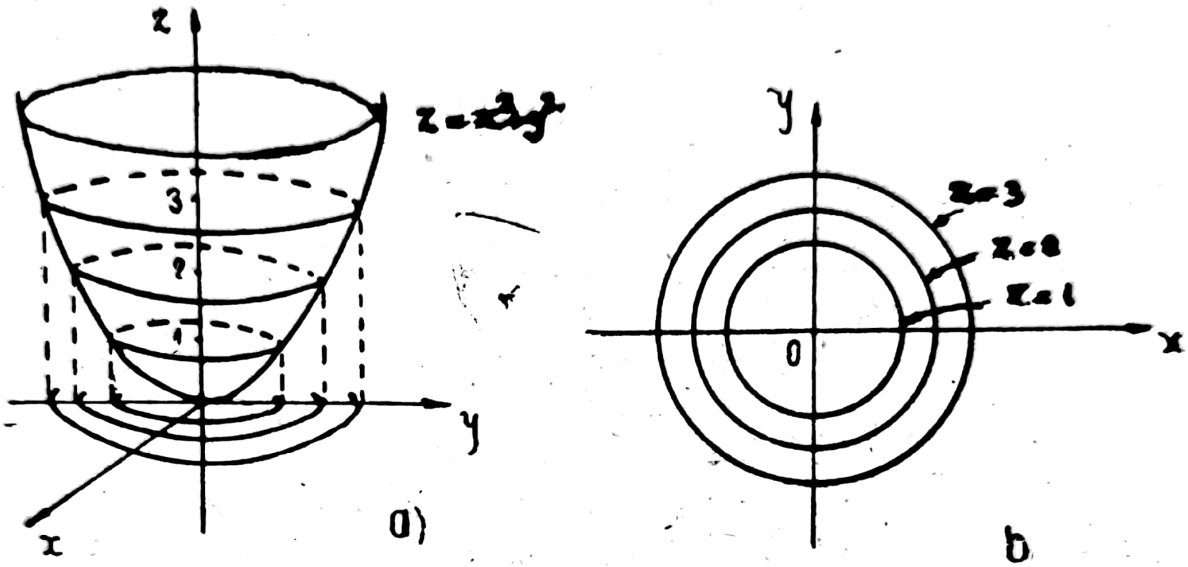


Fig. 2.2.4.

2.4.a. *Curbe de nivel.* Secționînd suprafața $z=f(x, y)$ cu plane $z=\text{const.}$ și proiectînd curbele obținute în planul xOy, obținem în acest plan o rețea de curbe numite *curbe de nivel*. Aceste curbe pot fi privite ca locuri geometrice ale punctelor de pe suprafață în care z ia valoare constantă:

$$f(x, y)=\text{const.}$$

În fig. 2.2.4, a, b, sînt puse în evidență curbele de nivel ale suprafeței $z=x^2+y^2$ corespunzătoare secțiunilor plane $z=1$, $z=2$ și $z=3$, și care sînt cercuri cu centrul în origine de raze egale respectiv cu 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

2.4.b. *Secțiuni verticale.* Putem, de asemenea, secționa suprafața $z=f(x, y)$ cu plane paralele cu axele de coordonate. Secțiunile care se obțin se numesc *secțiuni verticale*. Acestea ne sugerează cum variază z în planul secțiunii atunci cînd una dintre variabilele funcției este ținută constantă. De

Scanned with OKEN Scanner

exemplu, prin intersecţia suprafeţei $z=f(x, y)$ cu planul $x=a$ se obţine curba $z=f(a, y)$ care ne arată variaţia lui z ca funcţie de y în planul $x=a$. În fig. 2.2.5, a, b, sînt prezentate proiecţiile în planul yOz ale secţiunilor cu planele $x=1$, $x=2$ şi $x=3$, care sînt parabole cu axa Oz.

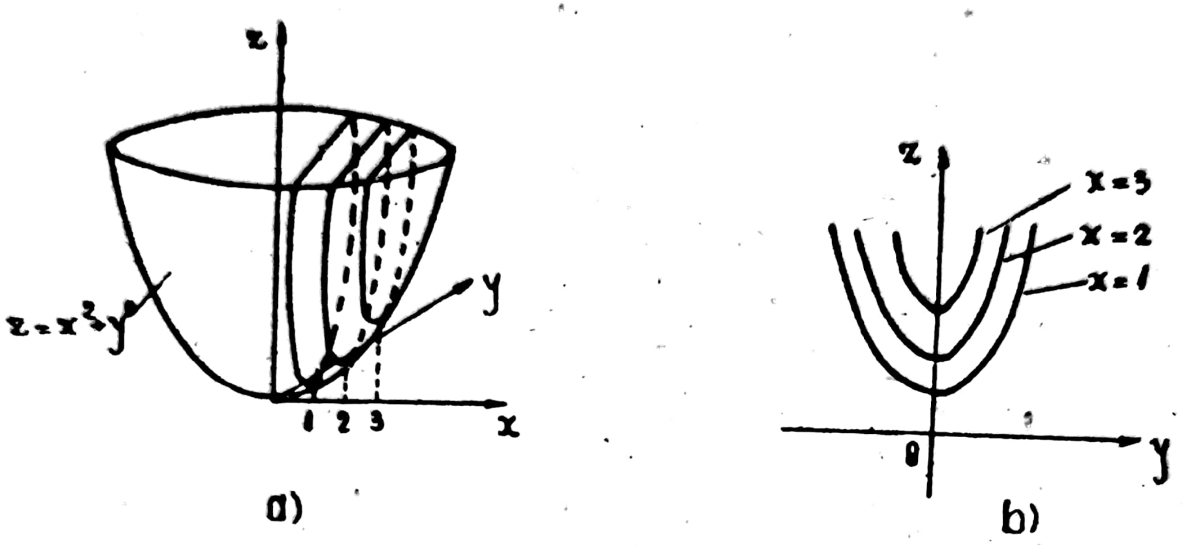


Fig. 2.2.5

Vom vedea mai departe că atît curbele de nivel cît şi secţiunile verticale au o importanţă aparte în studiul fenomenelor economice.

2.5. *Funcţii de n variabile.* Noţiunea de funcţie de n variabile (sau n argumente) este o extensiune naturală a noţiunii de funcţie de două variabile.

Definiţia 2.2.2. Fie D o mulţime de puncte din R^n şi I o mulţime de numere reale. O funcţie reală de n variabile reale definită pe D cu valori în I ($f: D \to I$, $D \subset R^n$) este o corespondenţă care asociază fiecărui sistem de n numere ordonate $(x_1, x_2, .., x_n)$ sau fiecărui punct $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, un număr real unic $u \in I$,

Se notează $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sau $u=f(P)$.

Mulţimea D poartă numele de *domeniu de definiţie (de existenţă) al funcţiei* f iar I — mulţimea în care f ia valori.

Facem observaţia că atît în cazul funcţiilor de două variabile cît şi a celor de n variabile cu $n>2$, corespondenţa dintre elementele mulţimii D şi elementele mulţimii I, poată fi exprimată printr-o formulă care indică legătura dintre

argumente și elementele mulțimii I, sau printr-un tabel în care se dau valorile argumentelor și valorile funcției corespunzătoare acestora. În acest din urmă caz, atît mulțimea de definiție D cît și mulțimea valorilor I sînt mulțimi discrete.

Exemple:

1. În cazul funcțiilor de trei variabile vom mai nota argumentele x_1, x_2, x_3 cu x, y, z. Formula $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$, definește o funcție reală de variabilele x, y, z care există în toate punctele din spațiu ale căror coordonate verifică inegalitatea $1-x^2-y^2-z^2\geqslant 0$. Această mulțime este o sferă închisă cu centrul în originea axelor de coordonate de rază egală cu unitatea. Deci:

$$D=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$$

Mulțimea valorilor funcției este intervalul $[0, +\infty)$.

2. Fie u prețul de cost al unei unități dintr-un anumit produs al unei întreprinderi; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — numărul unităților din fiecare tip de materie primă utilizată pentru realizarea produsului; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — costul unei unități din fiecare materie primă, c — valoarea salariilor plătite lucrătorilor care realizează produsul. Avem

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c+c_1x_1+c_2x_2+\ldots c_nx_n$$

În partea întia a acestui curs, s-a întîlnit această funcție, sub denumirea de funcție cost.

Observăm că domeniul de definiție al funcției f (avînd în vedere semnificația economică a cantităților x_i, $i=\overline{1, n}$,) este format din mulțimea punctelor din R^n ale căror coordonate sînt nenegative, adică:

$$D=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_i\geqslant 0,\ i=\overline{1, n}\}$$

Mulțimea valorilor funcției f este o submulțime a lui R.

2.6. *Suprafețe de nivel.* Să considerăm o funcție de trei variabile $u=f(x,y,z)$, definită pe mulțimea $D\subset R^3$. Dacă dăm lui u o valoare constantă așa cum am făcut în cazul funcțiilor de două variabile, obținem o figură geometrică care poartă numele de *suprafață de nivel*. Putem deci spune că o suprafață de nivel este locul geometric al punctelor $P(x, y, z)$ din R^3 care verifică ecuația:

$$f(x, y, z)=\text{const.}$$

Dînd lui u, valorile $u_1, u_2, \ldots, u_k$ obținem o familie de astfel de suprafețe reprezentînd o analogie cu liniile (curbele) de nivel definite pentru funcțiile de două variabile.

Exemplu. Fie funcția $u=x^2+y^2+z^2$ definită pe R^3 cu valori în R. Punînd $u=u_0$ obținem suprafața de nivel

$$x^2+y^2+z^2=u_0 \quad (u_0>0)$$

care este o sferă cu centrul în originea axelor de coordonate avînd raza $\sqrt{u_0}$. Deducem deci că suprafețele de nivel corespunzătoare funcției date sînt suprafețe sferice avînd centrele în origine.

Noțiunea de suprafață de nivel se poate extinde și la funcții de n variabile $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O suprafață de nivel, sau cum se mai spune, o *hipersuprafață* de nivel în R^n, va fi dată prin relația

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\text{const.}$$

2.7. *Funcții omogene și funcții convexe.*

Definiția 2.2.3. Fie $f: D\to R$, $D\subset R^n$. Funcția f se numește *omogenă de grad m*, dacă

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

unde $t>0$ este un parametru real.

Exemplu. Se consideră funcția $f(x, y)=x^2+2xy+y^2$ definită pe $D\subset R^2$.

Pentru orice $t>0$ avem:

$$f(tx, ty)=t^2x^2+2t^2xy+t^2y^2=t^2(x^2+2xy+y^2)=t^2f(x, y).$$

Prin urmare, funcția dată este omogenă de grad 2.

Definiția 2.2.4. Fie $f: D\to R$, $D\subset R^n$ și D o mulțime convexă (Partea I, cap. III). Funcția f se numește *convexă* dacă pentru oricare două puncte $X_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $X_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})\in D$, are loc relația:

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leqslant \lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2), \quad \lambda\in[0, 1].$$

Dacă relația de mai sus este satisfăcută numai cu semnul de inegalitate strict, funcția f se numește *strict* convexă.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că funcția f admite derivate parțiale de ordinul al doilea în D. O condiție suficientă pentru ca f să fie convexă (strict convexă) este ca matricea hessiană

$$H(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

să fie pozitiv semidefinită (definită).

Exemplu. Fie funcția $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1$. Matricea hessiană este

$$H(x)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se constată că matricea $H(x)$ este pozitiv definită și deci funcția f este strict convexă.

2.8. *Funcții de n variabile în teoria economică.*

1. *Funcția de producție.* O problemă importantă în studierea fenomenelor economice este aceea a influenței diverșilor factori variabili $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care contribuie la realizarea unui sort de marfă de către o întreprindere.

Dacă notăm cu u cantitatea de marfă produsă și cu q_i, $(i=\overline{1,n})$, contribuția factorului A_i la realizarea producției materiale, atunci cantitatea de marfă u trebuie privită ca o funcție de parametrii $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$u=f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

O astfel de funcție se numește *funcție de producție.*

Considerarea unui număr cît mai mare de factori care determină producția ar fi de dorit, deoarece prin aceasta se obține o imagine mai exactă a fenomenului economic ce însoțește producția. Totuși mărirea numărului de factori va-

Scanned with OKEN Scanner

riabili complică mult problema asupra căreia ne îndreptăm atenția.

Din acest motiv sînt preferate modele economice în care numărul variabilelor este redus numai la acele variabile care influențează în mod esențial desfășurarea fenomenelor, obținîndu-se astfel modele matematice simplificate.

Astfel dacă am considera că producția este influențată numai de doi factori A, B, a căror contribuție se manifestă prin parametrii p și q, atunci funcția de producție corespunzătoare va fi

$$u=f(p, q)$$

și se va reprezenta în sistemul de axe Opq, printr-o suprafață. O vom numi *suprafața producției.*

Curbele de nivel ale acestei suprafețe

$$f(p, q)=u_1=\text{const.}$$

se numesc *curbe de producție constantă.* O curbă a acestei familii conține toate punctele (p, q) ce reprezintă cît din fiecare factor A și B contribuie la realizarea unui anumit nivel u_1 de producție. Aceste curbe nu se intersectează, prin fiecare punct din planul pOq trecînd cîte o singură curbă de nivel constant.

Secțiunile verticale prin suprafața producției cu un plan $p=a$, arată variația procesului cînd contribuția factorului A este constantă și numai factorul B o influențează. Dînd lui p valorile $a_1, a_2, \ldots$, se obțin diverse secțiuni ale suprafeței de producție. În mod similar putem obține relevee ale suprafeței producției, dînd valori constante lui q. Cu ajutorul secțiunilor verticale ne putem da seama, de exemplu, de existența valorilor „de vîrf" ale producției, sau a valorilor staționare care corespund unor anumite combinații ale factorilor A și B.

Considerații similare se pot face și în cazul funcțiilor de producție de mai multe variabile.

Exemple de funcții de producție.

a. *Funcțiile Cobb-Douglas.*

În 1928, Cobb și Douglas au construit o relație simplă în care producția este rezultatul înmulțirii factorului muncă A cu factorul capital B. Dacă influențele acestor doi

Scanned with OKEN Scanner

factori se traduc prin parametrii p și q, atunci cea mai simplă formă pentru funcția Cobb-Douglas este

$$u=kp^{\alpha}q^{1-\alpha}$$

unde $0<\alpha<1$, u — reprezintă producția, p — munca utilizată și q — capitalul în funcțiune, toate exprimate în anumite unități definite prin convenție. Constanta k se interpretează ca un coeficient de eficiență a factorilor A și B în realizarea producției de nivel u. Constantele k și α se determină pe cale statistică.

O formă mai completă pentru funcțiile Cobb-Douglas este

$$u=kp^{\lambda}q^{\mu}$$

în care λ și μ reprezintă indicatori ce exprimă modificarea producției în funcție de cantitatea de muncă și respectiv în funcție de capitalul în funcțiune.

Analizele ulterioare au scos la iveală o serie de lacune ale acestor funcții motivîndu-se caracterul lor static și sfera incompletă de cuprindere.

Pentru a conferi un caracter dinamic acestor funcții s-au propus reprezentări de tipul

$$u=kp^{\lambda}q^{\mu}t\ e^{\psi}$$

în care t este timpul, iar ψ un parametru care reprezintă influența progresului tehnic la momentul t asupra factorilor A și B la realizarea producției. Dacă presupunem că $\psi=$ $=$const., funcția de mai sus apare ca o funcție Cobb-Douglas tridimensională.

Să studiem suprafața de producție corespunzătoare funcției Cobb-Douglas dată de :

$$u=kp^{\alpha}q^{1-\alpha},\quad 0<\alpha<1.$$

Curbele de producție constante sînt date de :

$$u=kp^{\alpha}q^{1-\alpha}=\text{const.}$$

Dacă punem $u=u_1$, și rezolvăm ecuația obținută găsim :

$$q^{1-\alpha}=\frac{u_1}{k}\cdot\frac{1}{p^{\alpha}}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$q=\frac{k_1}{p^m}$$

unde $k_1=\left(\frac{u_1}{k}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}>0, \qquad m=\frac{\alpha}{1-\alpha}>0.$

Observăm că

$$\frac{dq}{dp}=-\frac{mk_1}{p^{m+1}}<0, \qquad \frac{d^2q}{dp^2}=\frac{m(m+1)k_1}{p^{m+2}}>0$$

ceea ce ne arată că graficele funcțiilor de producție constantă sînt descrescătoare și convexe. Dacă $\alpha=\frac{1}{2}$, acestea se transformă în hiperbole echilaterale avînd axele Op și Oq ca asimptote (fig. 2.2.6, curbele reprezentate cu linie continuă).

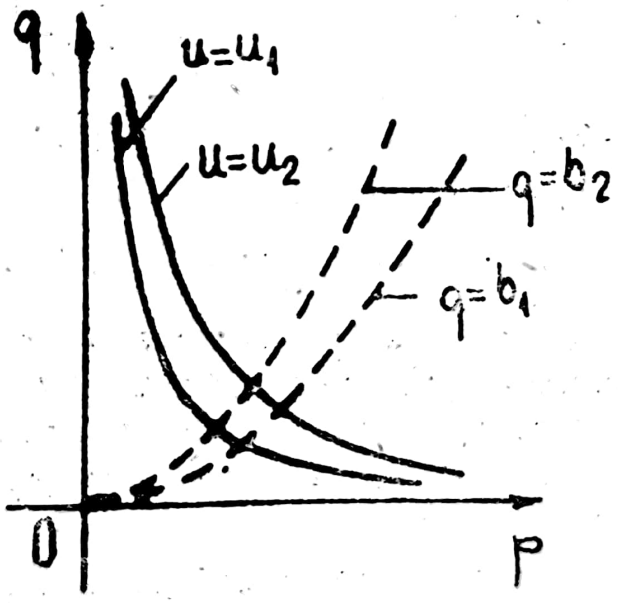


Fig. 2.2.6.

Secțiunea verticală $q=b$ $(b>0)$ ne dă

$$u=k_2p^{\alpha}$$

unde $k_2=kb^{1-\alpha}>0$.
Deoarece

$$\frac{du}{dp}=\alpha k_2p^{\alpha-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

care nu este definită în $p=0$ și nu se anulează în punctele la distanță finită pentru p, conchidem că nu există valori de vîrf ale funcției de producție. În particular, pentru $\alpha=\frac{1}{2}$, rezultă $u=k_2p^{1/2}$ și secțiunea verticală $q=b$ este un arc de parabolă situat în planul pOq, (fig. 2.2.6, curbele punctate).

În cadrul modelului tridimensional Cobb-Douglas suprafețele de nivel

$$kp^{\lambda}q^{\mu}te^{\psi}=\text{const.}$$

care, în acest caz, sînt *suprafețe ale producției constante*, ne arată măsura în care factorii A, B și factorul timp contribuie la realizarea unei producții de un nivel dat. În particular dacă ne fixăm la o valoare a producției $u=u_0$, și fixăm de asemenea valoarea lui t, $t=t_0$, se obține

$$kp^{\lambda}q^{\mu}t_0e^{\psi}=u_0$$

adică o secțiune prin suprafața de nivel $u=u_0$ ce caracterizează influența factorilor A și B la realizarea producției u_0 la momentul t_0.

b. O funcție de producție mai generală este

$$u=2Apq-Bp^2-Cq^2$$

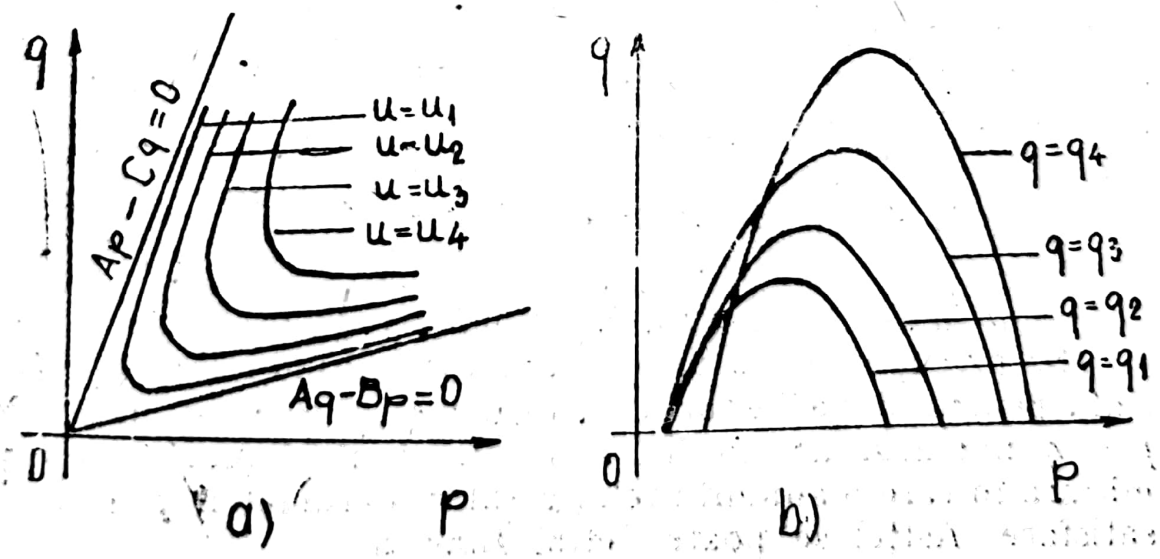


Fig. 2.2.7.

unde A, B și C sînt constante pozitive iar $A^2 > BC$.

În acest caz, curbele de nivel constant sînt date de

$$2Apq - Bp^2 - Cq^2 = \text{const.}$$

și reprezintă o familie de hiperbole (fig. 2.2.7.a) situate în interiorul domeniului mărginit de dreptele $Aq - Bp = 0$ și $Ap - Cq = 0$. Secțiunile verticale $q = q_i$, $i = 1, 2, \ldots$ sînt date de ecuațiile

$$u = 2Apq_i - Bp^2 - Cq_i^2$$

care pot fi scrise sub forma:

$$\left(u - \frac{A^2 - BC}{B} q_i^2\right) = -B\left(p - \frac{A}{B} q_i\right)^2$$

Aceste curbe reprezintă o familie de parabole concave cu axa verticală și se reprezintă ca în fig. 2.2.7. b.

Producția maximă se obține pentru valoarea lui p dată de

$$p = \frac{A}{B} q_i$$

și are valoarea

$$u = \frac{A^2 - BC}{B} q_i^2$$

Se remarcă faptul că nivelul de producție poate lua valori pozitive sau zero numai dacă:

$$\frac{q_i}{B}(A - \sqrt{A^2 - BC}) \leqslant p \leqslant \frac{q_i}{B}(A + \sqrt{A^2 - BC})$$

Funcția de utilitate. Curbe de indiferență.

Să presupunem că un consumator individual are preferință pentru două bunuri de consum A și B. Vom nota cu p și q numărul de unități din cele două bunuri și cu u măsura în care o anumită relație între parametrii p și q îl satisface. Astfel se poate defini funcția

$$u = F(p, q)$$

care poartă numele de *funcție de utilitate sau indicator de utilitate*. Valoarea lui u crește, rămîne constantă sau scade, după cum cumpărătorul consideră că o anumită combinație între cei doi factori îl situează mai bine, îl lasă indiferent sau îl situează mai rău. Liniile de nivel ale suprafeței de utilitate, adică liniile

$$F(p, q)=\text{const.}$$

alcătuiesc o familie de curbe care poartă numele de *hartă de indiferență a consumatorului*. Dacă considerăm, de exemplu, funcția

$$F(x, y)=ax+by+c\sqrt{xy}$$

în care a, b și c sînt constante pozitive, atunci o curbă de indiferență este dată de:

$$ax+by+c\sqrt{xy}=u_i, \quad u_i=\text{const.}, \quad i=1, 2, \ldots$$

Pentru $a=b=1$, și $c=\sqrt{2}$, familia de curbe de mai sus se reduce la:

$$x+y+\sqrt{2xy}=u_i\,.$$

Separînd radicalul și grupînd termenii se obține familia de cercuri:

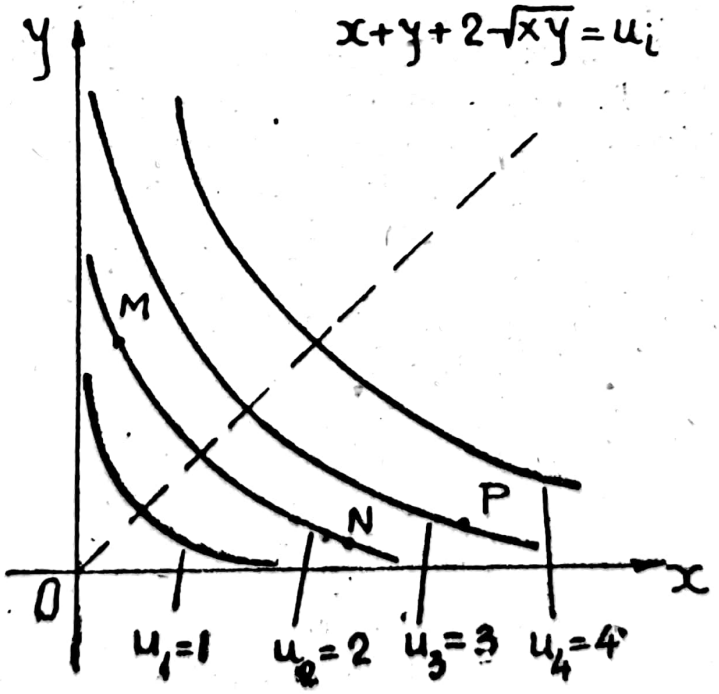


Fig. 2.2.8.

$$(x-u_i)^2+(y-u_i)^2=u_i^2$$

cu centrele pe prima bisectoare și de rază u_i (fig. 2.2.8). Orice punct de pe o curbă de indiferență îi procură consumatorului același nivel de utilitate, cum sînt, de exemplu, punctele M și N. Dar punctele de pe două curbe diferite corespund la utilități diferite. Este cazul punctelor M și P sau N și P. Să mai remarcăm că prin fiecare punct din plan trece o singură curbă de indiferență, iar acestea nu se intersectează între ele.

Problema se poate generaliza presupunînd că un consumator are o scară de preferință dată pentru o serie de n produse $A_1, A_2, \ldots A_n$ în proporțiile $p_1, p_2, \ldots p_n$. În acest caz indicatorul de utilitate u va fi funcția

$$u=F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

iar harta de indiferență a consumatorului va fi dată de:

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n)=\text{const.}$$

§3. LIMITE ȘI CONTINUITATE

3.1. *Limita unei funcții de n variabile.*

Deoarece studiul funcțiilor de două variabile poate fi extins asupra celor de n variabile fără dificultăți, în cele ce urmează vom formula definițiile și consecințele acestora în cazul funcțiilor de două variabile, indicînd modul cum acestea se generalizează la funcțiile de n variabile.

Fie $f(x, y)$ o funcție definită pe $D\subset R^2$ și $P_0(x_0, y_0)$ un punct de acumulare al mulțimii D. Ne punem problema comportării funcției f în vecinătatea punctului P_0, fără a ne interesa valoarea funcției în P_0 care s-ar putea să nu existe (funcția să nu fie definită în P_0). Dacă P_0 este punct de acumulare al mulțimii D, ne putem apropia oricît de mult de P_0, prin șiruri $(P_k)\subset R^2$ a căror limită să fie tocmai punctul P_0

$$\lim_{k\to\infty} P_k=P_0.$$

Definiția 2.3.1. Spunem că funcția $u=f(P)$, $P(x, y)\in D$, are limita l în punctul P dacă oricare ar fi șirul de puncte (P_k) convergent la P_0, cu $P_k\neq P_0$, șirul valorilor funcție

$f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_k), \ldots$, are limita l. Aceasta se notează astfel :

(2.3.1.) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=l$ sau $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=l$ sau $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k)=l$

Definiția de mai sus se extinde fără dificultate la funcții de n variabile, în care caz notăm

(2.3.2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=l$ sau $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=l$ sau $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k)=l$

unde de data aceasta (P_k) este un șir de puncte din R^n iar $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ sînt coordonatele punctului $P_0\in R^n$.

Ne amintim de la teoria șirurilor în R^n (§1, pct. 1.3) că

$$\lim_{k\to\infty} P_k=P_0$$

înseamnă că șirurile coordonatelor (x_k) și (y_k) atașate șirului P_k, tind simultan și independent la coordonatele x_0 și y_0 ale punctului P_0. Din acest motiv, limita definită mai sus pentru funcțiile de două și n variabile ($n>2$) trebuie privită ca limită în raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplul 1. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x, y)\neq(0, 0)$.

Mai întîi observăm că punctul $P\,(1, -1)$ aparține domeniului de definiție al funcției, este punct de acumulare al acestuia, dar nu vom face nici o referire la valoarea funcției în acest punct deoarece noțiunea de limită nu operează cu valoarea funcției în punct.

Pentru calculul limitei de mai sus vom considera un șir generic din R^2 : $(P_k(x_k, y_k))$, $P_k\neq P_0$, în care $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=1$ și $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=-1$, $(P_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} P_0)$.

Șirul valorilor funcției este

$$f(P_k)=f(x_k, y_k)=\frac{2x_k y_k}{x_k^2+y_k^2},$$

Limita acestui șir calculată prin folosirea operațiilor de înmulțire și împărțire a șirurilor de numere reale (x_k) și (y_k) există, ea fiind :

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{2x_k y_k}{x_k^2+y_k^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Așadar,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{2x}{x^2+y^2} = -1$$

În unele probleme sîntem nevoiți să calculăm limita funcției $f(x, y)$ în punctul $P_0(x_0, y_0)$ considerînd șiruri convergente la P_0 de o formă particulară cum ar fi $(P_k'(x_k, y_0))$ sau $(P_k''(x_0, y_k))$, cu condiția ca (x_k, y_0) și (x_0, y_k) să aparțină domeniului de definiție al funcției. Din punct de vedere geometric, (P_k') este un șir care tinde la P_0 pe dreapta $y=y_0$, iar (P_k'') un șir care tinde la P_0 pe dreapta $x=x_0$, punctul P_0 găsindu-se la intersecția acestor două drepte.

Să presupunem că în ambele cazuri există limitele :

$$\lim_{k\to\infty} f(P_k') = \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_0) = l_1$$

$$\lim_{k\to\infty} f(P_k'') = \lim_{k\to\infty} f(x_0, y_k) = l_2$$

sau sub o altă formă :

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = l_1, \quad \lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = l_2$$

Observăm că, spre deosebire de limita funcției în raport cu ansamblul (perechea) de variabile, limitele de mai sus apar ca limite „parțiale" și se caracterizează prin aceea că în fiecare din ele una dintre cele două variabile a fost fixată.

Problema care se pune acum este aceea de a stabili în ce raport stau între ele cele două noțiuni de limită.

În primul rînd este ușor de arătat că dacă există $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$, atunci există și $\lim_{x\to x_0} f(x, y_0)$ și $\lim_{y\to y_0} f(x_0, y)$ și ele sînt egale :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = \lim_{y\to y_0} f(x_0, y)$$

adică $l=l_1=l_2$.

Într-adevăr, dacă există limita funcției în P_0, pe orice șir ne-am apropia de P_0 limita șirului valorilor funcției este l. În particular și pe șiruri care tind la P_0 pe paralelele $x=x_0$ și $y=y_0$, limita funcției va exista, adică $l_1=l_2=l$.

Așadar existența limitei în raport cu ambele variabile implică existența limitelor în raport cu fiecare variabilă luată separat, atunci cînd variabila complementară este ținută fixă.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată, după cum se vede din exemplul următor.

Exemplul 2. Să reluăm funcția din exemplul 1 și să calculăm în cele două moduri limita în punctul (0, 0). Avem

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$
$$\lim_{y\to 0} f(0, y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

Deci limitele parțiale în raport cu x și y există.

Vom arăta că, totuși, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ nu există.

Într-adevăr, considerînd șirul $P_k(x_k, y_k)$, $(x_k\neq 0, y_k\neq 0)$ care tinde la $P_0(0, 0)$ pe o dreaptă ce trece prin origine de pantă m, $y=mx$ $(m\neq 0, m\neq +\infty)$ vom avea $y_k=mx_k$, $x_k\neq 0$ și deci:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=\lim_{k\to\infty}\frac{2mx_k^2}{x_k^2+m^2x_k^2}=\frac{2m}{1+m^2}\neq 0$$

Să observăm că limita depinde de m, deci de dreapta aleasă ca suport al șirului (x_k, y_k) și, prin urmare, funcția nu are limită în raport cu ansamblul variabilelor.

Observație. Pentru funcția $f(x, y)$ se pot considera, de asemenea, limitele iterate (suprapuse)

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) \text{ și } \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

care, în cazul cînd există, nu sînt totdeauna egale, după cum se vede din exemplul următor.

Exemplul 3. Fie funcția

$$f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ (x, y)\neq (0, 0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

Cele discutate mai sus în legătură cu limitele parțiale și limitele iterate se extind fără dificultate la funcțiile de n variabile.

3.2. *Continuitatea funcțiilor de n variabile.*

Definiția 2.3.2. Fie $f(x, y)$ o funcție definită pe $D\subset R^2$ și $P_0(x_0, y_0)\in D$. Spunem că funcția f este *continuă* în P_0 dacă limita sa în acest punct *există*, este *finită* și este egală cu valoarea funcției în punct, adică:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$$

Ținînd seama de modul cum a fost definită limita unei funcții într-un punct, definiția de mai sus poate fi reformulată în limbajul șirurilor astfel:

Funcția f este continuă în punctul P_0, dacă pentru orice șir (P_k) din R^2, care converge la P_0, are loc egalitatea:

$$\lim_{k\to\infty} f(P_k)=\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k)=f(x_0, y_0)=f(P_0)$$

Punctul P_0 se numește *punct de continuitate* al funcției f.

Dacă f este continuă în toate punctele unei mulțimi $A\subset R$, se spune că f este *continuă pe mulțimea A*.

În mod analog se definește continuitatea într-un punct sau pe o mulțime a unei funcții de n variabile ($n>2$).

Dacă funcția f este continuă în raport cu perechea variabilelor în punctul $P_0(x_0, y_0)$ atunci funcțiile $g(x)=f(x, y_0)$ și $h(y)=f(x_0, y)$ sînt continue în raport cu x și respectiv cu y în P_0.

Într-adevăr dacă $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ există atunci:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\lim_{x\to x_0} f(x, y_0)=\lim_{y\to y_0} f(x_0, y)=f(x_0, y_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate spune deci că dacă o funcție este continuă în raport cu ansamblul argumentelor într-un punct, atunci ea este continuă în acel punct și în raport cu fiecare variabilă, în parte, cînd variabila complementară este fixată.

Reciproca acestei afirmații nu este în general adevărată. Dacă o funcție este continuă în raport cu fiecare variabilă separat, nu neapărat funcția este continuă. Să considerăm, de exemplu, funcția:

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y)\neq(0, 0) \\ 0 & (x, y)=(0, 0) \end{cases}$$

Observăm că:

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=\lim_{x\to 0} 0=0=f(0, 0)$$

$$\lim_{y\to 0} f(0, y)=\lim_{y\to 0} 0=0=f(0, 0)$$

deci f este continuă în raport cu x cînd $y=0$ și în raport cu y cînd $x=0$.

Totuși, funcția f nu este continuă în raport cu perechea (x, y) deoarece, după cum s-a văzut în §3, exemplul 2 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ nu există.

§. 4. DERIVATE PARȚIALE

4.1. *Preliminarii.*

Vom aminti mai întîi noțiunea de derivată într-un punct pentru o funcție de o variabilă reală.

Fie $f(x)$ o funcție definită în vecinătatea punctului x_0 inclusiv în punctul x_0. Dacă x este un punct din această vecinătate, cantitatea $x-x_0=h$ definește creșterea variabilei x. Deoarece putem scrie $x=x_0+h$, variind creșterea h între anumite limite, putem obține toate punctele vecinătății considerate.

Să notăm cu Δf creșterea funcției corespunzătoare creșterii h a argumentului x. Avem

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Raportul

$$\frac{\Delta f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

se poate interpreta ca o viteză (rată) medie de creștere a funcției pe intervalul $[x_0, x_0+h]$.

Spunem că funcția $f(x)$ este *derivabilă* în punctul x_0 dacă limita raportului $\frac{\Delta f(x_0)}{h}$ pentru $h\to 0$ există și este finită. Această limită se numește *derivata* funcției f în în punctul x_0 și se notează cu $f'(x_0)$ sau $\frac{df(x_0)}{dx}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\left(=\frac{df(x_0)}{dx}\right)$$

Dacă $f'(x_0)=\pm\infty$ vom spune că funcția f are derivată în punctul x_0, dar nu vom afirma că ea este derivabilă în x_0.

Numărul $f'(x_0)$ ne dă măsura vitezei (ratei) de variație a lui f în punctul x_0, iar din punct de vedere geometric are ca interpretare panta tangentei dusă la graficul funcției în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$ (fig. 2.4.1).

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$$

Amintim, de asemenea, că dacă $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, ea este continuă în x_0 reciproca acestei afirmații nefiind, în general, adevărată.

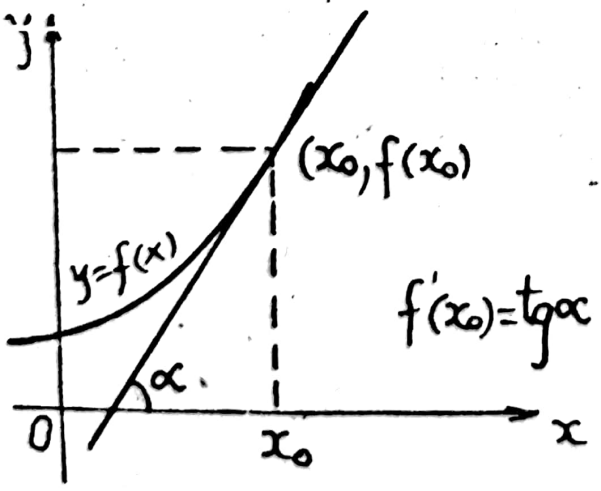


Fig. 2.4.1

Fie acum $f(x, y)$ o funcție de două variabile definită într-o vecinătate a punctului $P_0(x_0, y_0)$, inclusiv în punctul P_0. Considerînd pe y fixat, $y=y_0$, și dînd lui x creșterea h, funcția $f(x, y_0)$ privită ca funcție de o singură variabilă va căpăta creșterea

$$\Delta_x f(x_0\ y_0)=f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$$

unde prin $\Delta_x f$ am notat faptul că această creștere a rezultat care urmare a variației lui x, pentru y fixat.

În mod analog, considerînd pe x fixat, $x=x_0$, creșterea funcției $f(x_0,\ y)$ corespunzătore unei creșteri k a lui y va fi

$$\Delta_y f(x_0,\ y_0)=f(x_0,\ y_0+h)-f(x_0,\ y_0)$$

unde $\Delta_y f$ notează acum faptul că această creștere a rezultat ca urmare a variației lui y pentru x fixat. Rapoartele

$$\frac{\Delta_x f(x_0,\ y_0)}{h}=\frac{f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{h};$$

$$\frac{\Delta_y f(x_0,\ y_0)}{k}=\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)}{k}$$

dau vitezele de creștere ale funcției f în raport cu x cînd y este fixat, respectiv în raport cu y cînd x este fixat.

4.2. *Derivate parțiale de ordinul întîi.*

Definiția 2.4.1. Dacă pentru $y=y_0$, funcția $f(x,\ y_0)$ este derivabilă ca funcție de x, în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$, adică există

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_x(x_0,\ y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{h}$$

și este finită, vom spune că f este *derivabilă parțial în raport cu* x în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$.

Această limită se notează cu unul dintre simbolurile:

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x},\quad f'_x(x_0,\ y_0)\ \text{sau}\ f'(P_0)$$

și se numește *derivată parțială* a funcției f *în raport cu* x în punctul P_0.

Deci:

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}=f'_x(x_0,\ y_0)=f'_x(P_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{h}$$

Definiția 2,4.2. Dacă pentru $x=x_0$, funcția $f(x_0,\ y)$ este derivabilă ca funcție de y în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$, adică există

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{k\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,\ y_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)}{k}$$

și este finită, vom spune că f este *derivabilă parțial în raport cu* y în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$.

Această limită se notează cu unul dintre simbolurile

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y},\quad f'_y(x_0,\ y_0) \text{ sau } f'_y(P_0)$$

și se numește *derivata parțială* a funcției f în *raport cu* y în punctul P_0. Deci:

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}=f'_y(x_0,\ y_0)=f'_y(P_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)}{k}$$

Dacă $f(x,\ y)$ este derivabilă în raport cu x (sau y), în price punct $P(x,\ y)$ al unei mulțimi D, vom spune că funcția f este derivabilă parțial în raport cu x (sau y) pe mulțimea D.

Corespondența care asociază oricărui punct $(x_0,\ y_0)\in D$ numărul $f'_x(x_0,\ y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$ definește o nouă funcție de două variabile care se numește *derivata parțială* a funcției f în raport cu x pe mulțimea D și se notează cu:

$$f'_x(x,\ y) \text{ sau } \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$$

În mod similar, asociind oricărui punct $(x_0,\ y_0)\in D$ numărul $f'_y(x_0,\ x_0)=\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$, definim o altă funcție de două variabile care se numește *derivata parțială* a funcției f în raport cu y pe mulțimea D și o notăm cu:

$$f'_y(x,\ y) \text{ sau } \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$$

Funcțiile $f'_x(x,\ y)$ și $f'_y(x,\ y)$ se numesc *derivatele parțiale de ordinul întîi* ale funcției $f(x,\ y)$.

Constatăm deci că pentru a calcula derivata parțială a funcției f în raport cu x, considerăm în funcția f pe y ca un

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{k\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,\ y_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)}{k}$$

și este finită, vom spune că f este *derivabilă parțial în raport cu* y în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$.

Această limită se notează cu unul dintre simbolurile

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y},\quad f'_y(x_0,\ y_0)\ \text{sau}\ f'_y(P_0)$$

și se numește *derivata parțială* a funcției f în *raport cu* y în punctul P_0. Deci:

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}=f'_y(x_0,\ y_0)=f'_y(P_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)}{k}$$

Dacă $f(x,\ y)$ este derivabilă în raport cu x (sau y), în price punct $P(x,\ y)$ al unei mulțimi D, vom spune că funcția f este derivabilă parțial în raport cu x (sau y) pe mulțimea D.

Corespondența care asociază oricărui punct $(x_0,\ y_0)\in D$ numărul $f'_x(x_0,\ y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$ definește o nouă funcție de două variabile care se numește *derivata parțială* a funcției f în raport cu x pe mulțimea D și se notează cu:

$$f'_x(x,\ y)\ \text{sau}\ \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$$

În mod similar, asociind oricărui punct $(x_0,\ y_0)\in D$ numărul $f'_y(x_0,\ x_0)=\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$, definim o altă funcție de două variabile care se numește *derivata parțială* a funcției f în raport cu y pe mulțimea D și o notăm cu:

$$f'_y(x,\ y)\ \text{sau}\ \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$$

Funcțiile $f'_x(x,\ y)$ și $f'_y(x,\ y)$ se numesc *derivatele parțiale de ordinul întîi* ale funcției $f(x,\ y)$.

Constatăm deci că pentru a calcula derivata parțială a funcției f în raport cu x, considerăm în funcția f pe y ca un

Scanned with OKEN Scanner

parametru constant și o derivăm ca funcție numai de variabila x; la fel, pentru a calcula derivata parțială a funcției f în raport cu y, vom considera pe x drept parametru constant și o vom deriva ca funcție de y.

Observație. Derivatele parțiale ale sumei, produsului și cîtului a două funcții de două variabile se vor calcula după aceleași reguli care dau derivatele sumei, produsului și cîtului a două funcții de o variabilă.

Exemplu. Fie funcția $f(x, y) = x^3y + xy^3 - 2x^2 - 3y^2 - x + y + 1$, definită pentru orice $(x, y) \in R^2$. Avem:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2y + y^3 - 4x - 1, \quad (x, y) \in R^2,$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - 6y + 1 \quad (x, y) \in R^2.$$

Într-un punct, cum ar fi $P_0(1, 1)$ valorile acestor derivate sînt:

$$f'_x(1, 1) = \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = -1,$$

$$f'_y(1, 1) = \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = -1,$$

Fie acum $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție de n variabile definită în vecinătatea punctului $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ inclusiv în punctul P_0. Derivatele parțiale de ordinul întîi are funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în punctul P_0 se definesc în manieră similară aceleia din cazul funcțiilor de două variabile și se notează cu:

$$f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ sau } \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

De exemplu, $f'_{x_1}(P_0)$ este definită astfel:

$$f'_{x_1}(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + h_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{h_1}$$

unde h_1 este creșterea variabilei x_1 considerînd variabilele $x_2, x_3, \ldots, x_n$ fixate și egale respectiv cu $x_2^0, x_3^0 \ldots, x_n^0$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este derivabilă în fiecare punct $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ al unei mulțimi $D \in R^n$, funcțiile $f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, definesc *derivatele parțiale* de ordinul întîi ale funcției $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ în raport cu variabilele x_i, în D.

Exemplu. Fie $f(x_1, x_2, ..., x_n) = e^{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ definită în tot spațiul R^n. Considerînd pe rînd funcțiile de o variabilă cînd $n-1$ dintre variabile sînt ținute constante, obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2 + ... + x_n^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2 + ... + x_n^2}, \quad ..., \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 2x_n e^{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

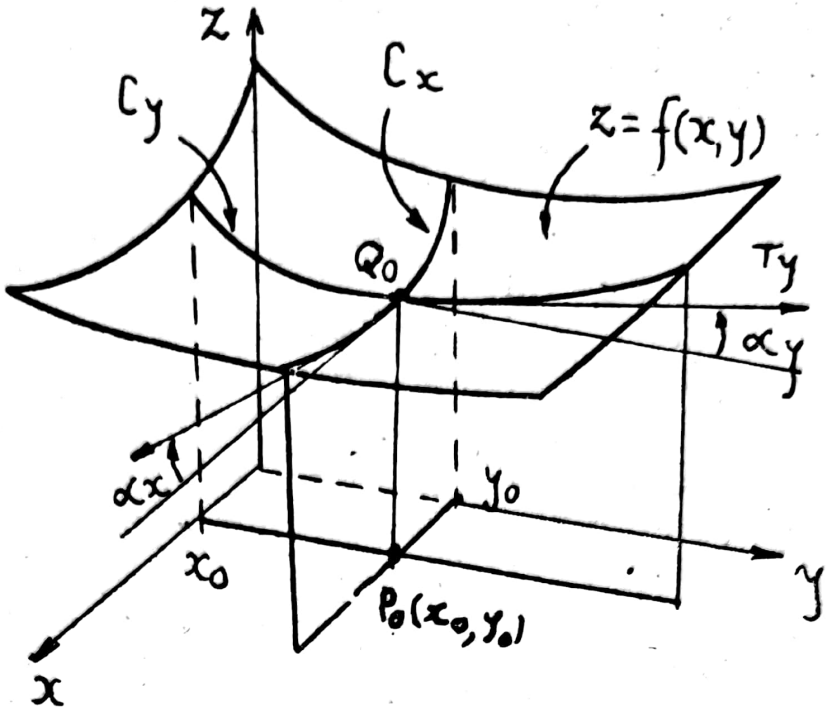
Funcția $f = e^{x_1^2 + ... + x_n^2}$ este derivabilă parțial în raport cu fiecare din cele n variabile în tot spațiul R^n, deoarece $f'_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sînt finite în oricare punct al acestei mulțimi. Considerînd, de exemplu, punctul $P_0(1, 1, ..., 1)$, vom avea

$$\frac{\partial f(1, 1, ..., 1)}{\partial x_i} = 2e^n, \quad i = \overline{1, n}$$

4.3. *Semnificația geometrică a derivatelor parțiale.*

Vom considera din nou cazul funcțiilor de două variabile. Fie $z = f(x, y)$ o funcție care admite derivate parțiale în raport cu x și cu y în orice punct al domeniului ei de existență, și $P_0(x_0, y_0)$ un asemenea punct. Să ducem prin P_0 planele $x = x_0$ și $y = y_0$ (fig. 2.4.2). Intersecțiile acestor plane cu suprafața $z = f(x, y)$ sînt secțiunile verticale C_y în planul $x = x_0$ și C_x în planul $y = y_0$. Acestea se intersectează în punctul $Q_0[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ aparținînd suprafeței. Ducem în acest punct tangentele T_y și T_x la curbele C_y și C_x și notăm cu α_y și α_x unghiurile pe care le formează aceste tangente cu direcțiile pozitive ale axelor Oy și Ox. Deoarece curba C_x se află în planul $y = y_0$ panta tangentei T_x dusă în punctul de abscisă x_0 va fi egală cu derivata funcției $f(x, y_0)$ în raport cu x. Dar aceasta, conform definiției, coincide cu derivata parțială a funcției f în punctul P_0. Așadar, avem:

Scanned with OKEN Scanner



$$tg\,\alpha_x = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \quad tg\,\alpha_y = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}$$

Fig. 2.4.2

$$f'_x(P_0) = \frac{\partial f P_0)}{\partial x} = \text{tg}\ \alpha_x$$

În mod analog deducem că:

$$f'_y(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = \text{tg}\ \alpha_y$$

Prin urmare, $f'_x(P_0)$ și $f'_y(P_0)$ au ca interpretări geometrice, pantele tangentelor duse în punctul Q_0 la curbele $y=y_0$ și respectiv $x=x_0$, de pe suprafața $z=f(x, y)$.

Ținînd seama de semnificația derivatelor parțiale rezultă că $f'_x(P_0)$ și $f'_y(P_0)$ măsoară viteza de creștere a funcției f în raport cu x în secțiunea $y=y_0$ și respectiv în raport cu y în secțiunea $x=x_0$.

Observație. Planul determinat de tangentele T_x și T_y duse prin punctul $Q[x, y, f(x, y)]$ de pe suprafața $z=f(x, y)$

Scanned with OKEN Scanner

poartă numele de *plan tangent* la suprafață în punctul Q. Perpendiculara în punctul Q pe planul tangent (T_x, T_y) definește *normala* n la suprafață în punctul Q (fig. 2.4.3.).

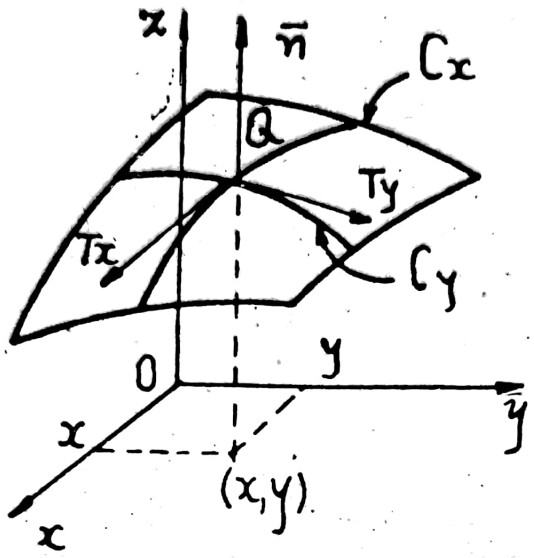


Fig. 2.4.3

4.4. *Gradientul unei funcții.*

Fie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcție de n variabile derivabilă în raport cu toate cele n variabile în punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Vectorul n dimensional care are drept coordonate derivatele parțiale ale funcției f în punctul P_0, poartă numele de *gradientul* funcției f în P_0 și se notează cu $\nabla f(P_0)$ (semnul „∇" se citește *nabla*).

Prin urmare:

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} \right)$$

Dacă funcția f admite derivate parțiale de ordinul întîi în toate punctele P ale unei mulțimi $D \subset R^n$, atunci în fiecare asemenea punct se poate defini gradientul funcției f și anume:

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(P)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(P)}{\partial x_n} \right)$$

Gradientul funcției f în punctul P are ca semnificație creșterea funcției pe direcția normalei, în punctul P dusă la suprafață $u=f(P)$.

În particular, pentru o funcție de două variabile, $z=f(x, y)$, gradientul lui f, are expresia:

$$\nabla f(P)=\left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}\right)$$

Exemplu. Să considerăm funcția $f(x, y)=x^2y+y^2$. Derivatele parțiale ale acestei funcții fiind

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2y$$

avem

$$\nabla f=(2xy, x^2+2y)$$

În particular în punctul $P_0(1, -2)$, gradientul funcției f are coordonatele:

$$\nabla f(P_0)=(-4, -3).$$

4.5. *Derivate și derivate parțiale în matematica economică (valori medii, valori marginale, elasticități).*

4.5.1. *Valori medii și valori marginale.*

a. *Funcții de o variabilă.*

Să considerăm un proces economic care depinde de un singur factor variabil A. Atașăm factorului A variabila x. Dacă y este un parametru al procesului care este influențat de factorul A variația acestuia în raport cu x va fi descrisă printr-o funcție reală:

$$y=f(x).$$

O astfel de funcție ar putea fi relația dintre cererea pieței pentru o anumită marfă și prețul ei, relația dintre costul total și nivelul producției etc. În literatura de specialitate sînt cunoscute forme explicite ale unor asemenea funcții, forme care se determină, în majoritatea cazurilor prin ajustări convenabile ale datelor empirice. Dăm mai jos cîteva exemple.

Scanned with OKEN Scanner

Funcții de cerere. (Variabila independentă-prețul)	*Funcții de cost.* (Variabila independentă-nivelul producției)
1. $y=\frac{a-x^2}{b}$	1′ $y=ax+b$
2. $y=\frac{\sqrt{a-x}}{b}$, $x\leqslant a$	2′ $y=\sqrt{ax+b}+c$. $x\geqslant -\frac{b}{a}$
3. $y=ae^{-bx}$	3′ $y=ae^{bx}$
4. $y=bx^{-a}$	4′ $y=ax^3-bx^2+cx+d$ $(b^2-3ac<0)$

Se constată că aceste funcții au sens din punct de vedere economic numai atunci cînd parametrii a, b, c, d, precum și variabilele x și y sînt cantități nenegative.

Din acest motiv, în cele ce urmează, vom presupune că funcția $f(x)$ este definită pentru $x\in I$, $I=(0, +\infty)$ cu valori în R. În plus, va fi necesar să presupunem că ea este continuă și derivabilă pe I.

Fie $x\in I$ un punct fixat. Relativ la punctul x se pot defini două mărimi: *valoarea medie* și *valoarea marginală* a funcției $f(x)$.

Definiția 2.4.3. Se numește *valoare medie* a lui $f(x)$ raportul

$$R(x)=\frac{f(x)}{x}$$

Constatăm deci că valoarea medie se raportează la o valoare finită a lui x. Din punct de vedere geometric, valoarea medie este dată de panta coardei OP a graficului funcției $y=f(x)$ (fig. 2.4.4. a)

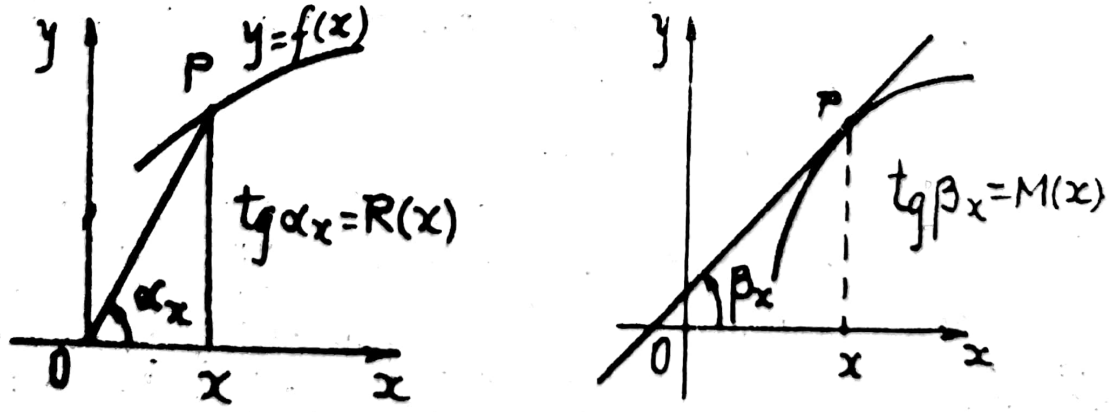


Fig. 2.4.4 a, b

Dacă $R(x)$ există pentru orice $x \in I$, $x \neq 0$, funcția $y=R(x)$, se va numi *funcție a valorilor medii* ale lui f.

Definiția 2.4.4. Se numește *valoare marginală* a funcției f, derivata ei în punctul x, adică

$$M(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Observăm că raportul $\frac{f(x)+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ reprezintă valoarea medie a funcției f pe intervalul de lungime Δx dar, de această dată, valorile lui Δx sînt din ce în ce mai mici, ceea ce, din punct de vedre matematic conduce la derivata funcției f. De aici rezultă și interpretarea geometrică a valorii marginale a funcției f în punctul x : ea este numeric egală cu panta tangentei dusă la graficul $y=f(x)$ în punctul x, adică $\mathrm{tg}\beta_x$ (fig. 2.4.4, b). Funcția $M : I \to I_1 \subset I$ (I_1 fiind mulțimea punctelor în care f este derivabilă), se va numi *funcție a valorilor marginale*, ale lui f.

Aplicație. Să considerăm o funcție cost de forma 4', adică :

$$f(x)=ax^3-bx^2+cx+d \qquad (b^2-3ac<0).$$

Conform definițiilor de mai sus, avem :

Funcția cost total : $f(x)=ax^3-bx^2+cx+d$

Funcția cost mediu : $R(x)=\frac{f(x)}{x}=ax^2-bx+c+\frac{d}{x}$

Funcția cost marginal : $M(x)=f'(x)=3ax^2-2bx+c$

Să analizăm proprietățile și variația acestor funcții. Începem cu funcția cost. Derivata acestei funcții este

$$f'(x)=3ax^2-2bx+c$$

care, în cazul $b^2-3ac<0$, este pozitivă (deoarece $a>0$). Prin urmare, $f(x)$ va fi crescătoare (costul total de producție crește odată cu mărirea volumului producției). Apoi.

$$f''(x)=6ax-2b$$

Scanned with OKEN Scanner

și observăm că $f''(x)=0$ pentru $x=\frac{b}{3a}$. Deci în acest punct graficul funcției cost are un punct de inflexiune, adică își schimbă concavitatea. Acest punct poate fi interpretat ca un punct de „echilibru" între cele două variabile: cost și producție. Nivelul producției în acest punct este $x=\frac{b}{3a}$, căruia îi corespunde costul de producție $f\left(\frac{b}{3a}\right)=d+\frac{bc}{3a}-\frac{2b^3}{27a^2}$

Graficul funcției $y=f(x)$ este reprezentat în fig. 2.4.5. cu linie plină

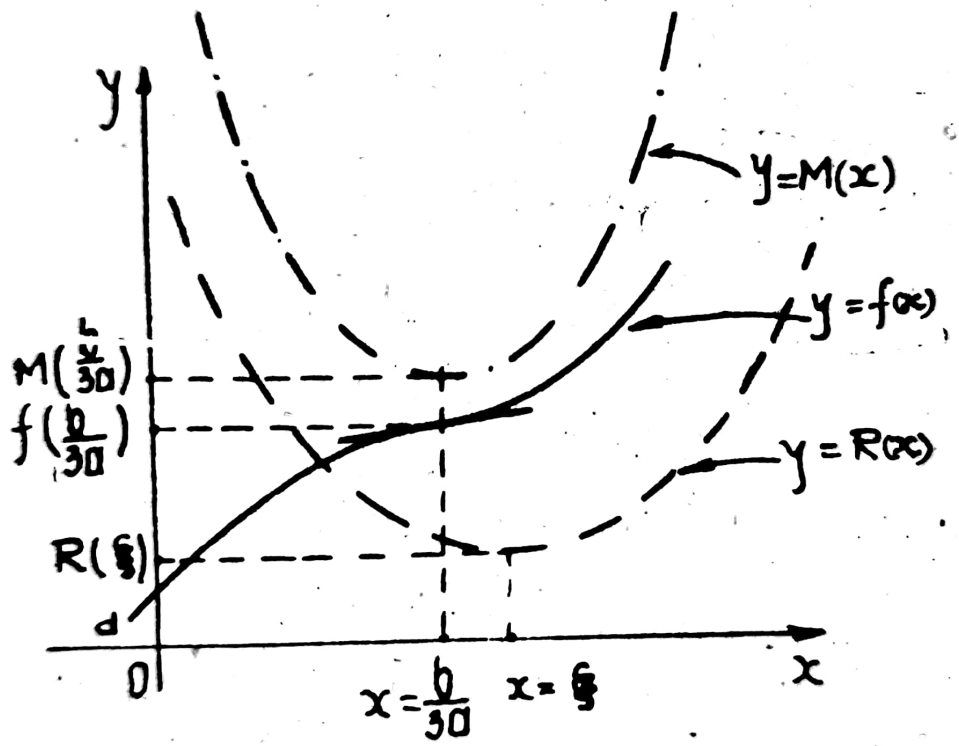


Fig. 2,4.5

Să considerăm acum funcția $R(x)$. Calculînd derivata acestei funcții găsim:

$$R'(x)=2ax-b-\frac{d}{x^2}$$

Egalînd cu zero pe $R'(x)$, obținem ecuația

$$2ax^3-bx^2-d=0$$

Se poate dovedi că această ecuație are o singură rădăcină reală și pozitivă ξ în intervalul $\left(\frac{b}{3a}, +\infty\right)$. Deoarece

$$R''(x) = 2a + \frac{2d}{x^3}$$

va rezulta $R''(\xi) > 0$ și, deci, ξ este un punct de minim al funcției $R(x)$. Totodată, observăm că $\lim\limits_{x \to 0} R(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} R(x) = +\infty$. Prin urmare curba costului mediu descrește pînă se atinge nivelul de producție $x = \xi$ după care ea este crescătoare. Graficul acestei funcții este redat în fig. 2.4.5. prin linie punctată.

În fine, se observă direct, fără a face calcule suplimentare că funcția cost marginal, $y = M(x)$ are drept punct de minim $x = \frac{b}{3a}$ (este descrescătoare la stînga în acest punct și crescătoare la dreapta). Valoarea funcției în punctul de minim este :

$$M\left(\frac{b}{3a}\right) = \frac{3ac - b^2}{3a} > 0$$

Graficul curbei cost marginal se va reprezenta printr-o parabolă convexă cu vîrful în punctul de coordonate $\left(\frac{b}{3a}, M\left(\frac{b}{3a}\right)\right)$. Acesta curbă este marcată pe fig. 2.4.5 prin linie și punct.

În manieră similară poate fi studiată problema valorilor medii și marginale pentru o funcție de producție (valori medii și marginale de producție) sau pentru o funcție de cerere (valori medii și valori marginale ale cererii), etc.

b. *Cazul funcțiillor de n variabile.*

Să considerăm acum un fenomen economic dependent de n factori A_1, A_2, ..., A_n, măsura contribuției acestora în desfășurarea fenomenului fiind caracterizată prin variabilele x_1, x_2, ..., x_n. Dacă u este parametrul care descrie evoluția fenomenului atunci putem scrie

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemple de astfel de funcţii pot fi : funcţiile de producţie sau funcţiile de utilitate, la care ne-am referit în paragraful 2.8.

În cele ce urmează vom ptesupune că funcţia f este definită pe mulţimea $D \subset R^n$; $D=\{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \geqslant 0, i=\overline{1, n}\}$, este continuă pe D şi derivabilă parţial pînă la ordinul al doilea inclusiv, pe $D_1 \subset D$.

Pentru a fixa ideile să ne referim la un proces de producţie. Prin urmare u va reprezenta nivelul producţiei — exprimat în unităţi convenţionale — în dependenţă de aportul factorilor x_i, $i=\overline{1, n}$, exprimaţi de asemenea în anumite unităţi.

Să presupunem că $n-1$ dintre factorii A_i, $i=\overline{1, n}$, rămîn constanţi şi se modifică doar unul singur. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că acesta este factorul A_1. Prin urmare, va trebui să considerăm pe x_1 variabil şi $x_2=x_2^0$, $x_3=x_3^0$, ..., $x_n=x_n^0$, constante. În acest caz funcţia

$$u=f(x_1, x_1^0, ..., x_n^0)$$

devine funcţie numai de variabila x_1.

Definiţia 2.4.5. Se numeşte *valoare medie* în raport cu factorul A_1 sau în raport cu variabila x_1, expresia

$$R(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)=\frac{f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)}{x_1}$$

în cazul concret pe care l-am ales $R(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$ va reprezenta *prodsul mediu* corespunzător factorului A_1 sau cantitatea de produs pe unitatea de factor A_1 cînd ceilalţi factori au fost menţinuţi constanţi

Funcţia $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ depinzînd de cele n variabile se va numi *funcţie a valorilor medii* asociată lui $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definiţia 2.4.6. Se numeşte *valoare marginală* în raport cu factorul A_1 sau în raport cu variabila x_1, expresia

$$M(x, x_2^0, ..., x_n^0)=\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2^0, ..., x_n^0)-f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)}{x_1}=$$

$$=\frac{\partial f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)}{\partial x_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea $M(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$ exprimă viteza (rata) de creștere a producției atunci cînd numai factorul A_1 variază, ceilalți menținîndu-se constanți.

Funcțiile produs mediu și produs marginal corespunzătoare celorlalți factori se definesc în mod analog.

Funcția $M(x_1, x_2, .., x_n)$ care descrie contribuția simultană a factorilor $A_1, A_2, ..., A_n$ se va numi *funcție a valorilor marginale* asociate lui f, sau, în cazul nostru, funcția produs marginal.

Pentru a studia mai în amănunțime proprietățile și variația acestor factori să ne limităm la un proces de producție dependent numai de doi factori A și B, măsura contribuției acestora la un nivel de producție z, fiind caracterizată prin variabilele x și y. Funcția de producție corespunzătoare va fi atunci

$$z=f(x, \quad y) \tag{2.4.1}$$

definită pe $D\subset R^2$; $D=\{(x, \ y)|x\geqslant 0, \ y\geqslant 0\}$.

Dacă considerăm unul din factori constant, de exemplu, B aceasta revine la a pune $y=b$ și deci, producția variabilă în funcție de x va fi descrisă de funcția

$$z=f(x, \quad b).$$

Or, graficul acestei funții nu este altceva decît secțiunea verticală $y=b$, în suprafața producției (2.4.1) și va reprezenta curba producției corespunzătoare variației factorului A. Dacă $P(x, \ b)$ este un punct de pe această curbă, atunci valoarea medie în punctul x este dată de panta dreptei MP, M fiind punctul de intersecție al planului $y=b$ cu axa Oy iar valoarea marginală în punctul x, de panta tangentei dusă în P la secțiunea verticală $z=f(x, \ b)$, pantă egală cu $f'(x, \ b)$.

Evident, aceleași considerații se pot face dacă am considera factorul A constant și factorul B variabil. În acest caz ne vom situa în secțiunea verticală $x=a$.

Aplicație. Să considerăm pentru studiu, cazul particular descris prin funcția de producție

$$z=2Apq-Bp^2-Cq^2, \qquad p>0, \ q>0$$

în care A, B, C sînt constante pozitive supuse la condiția $A^2-BC>0$. Această funcție a fost studiată în Cap. 2, punctul 2.8. p. 71.

Scanned with OKEN Scanner

În acest exemplu, rolul variabilelor x și y îl joacă p și q. Astfel, dacă $q=q_0$, vom avea

$$z(p,\ q_0)=2Apq_0-Bp^2-Cq_0^2 \tag{2.4.2}$$

funcție care reprezintă variația nivelului de producție cînd factorul B se menține constant (secțiunea $q=q_0$).

Funcția valoate medie a producție în punctul $P(p,\ q_0)$ va fi dată de

$$R(p,\ q_0)=\frac{z(p,\ q_0)}{p}=2Aq_0-Bp-\frac{Cq_0^2}{p} \tag{2.4.3}$$

iar funcția valoare marginală de

$$M(p,\ q_0)=\frac{\partial z(p,\ q_0)}{\partial p}=2(Aq_0-Bp) \tag{2.4.4}$$

Pentru a analiza modul cum depinde producția numai de modificările factorului A, vom analiza variația acestor funcții.

Astfel, ținînd seama de (2.4.2) vom avea

$$\frac{\partial z}{\partial p}=2(Aq_0-Bp);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=-2B,\quad B>0.$$

Constatăm astfel că pentru valoarea $p_1=\frac{A}{B}q_0$, curba producției $z(p,\ q_0)$ are un maxim local a cărui valoare este:

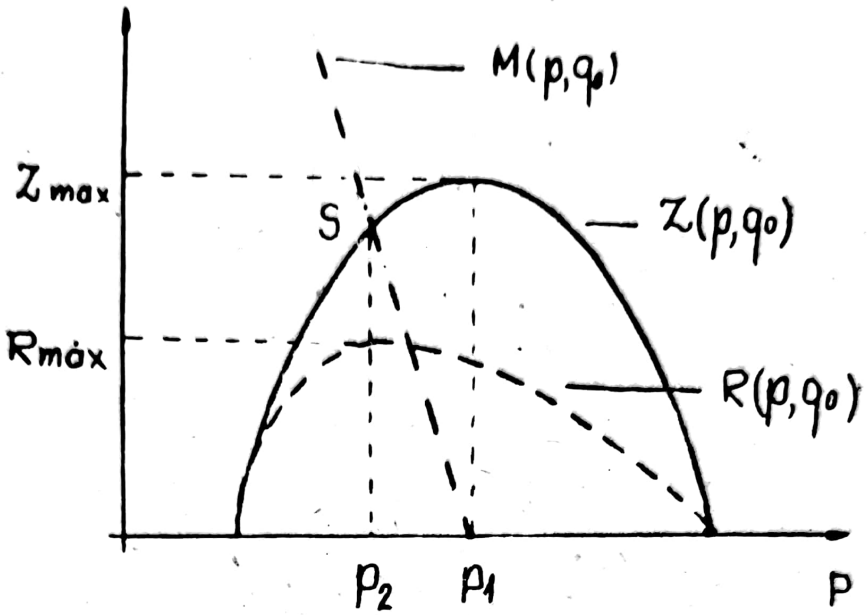
$$z_{max}=z(p,\ q_0)=\frac{1}{B}(A^2-BC)q_0^2>0$$

Această curbă este redată în fig. 2.4.6 prin linie plină.

Considerăm acum funcția valoare medie a producției. Vom avea:

$$\frac{\partial R(p,\ q_0)}{\partial p}=-B+C\frac{q_0^2}{p^2},\quad \frac{\partial^2 R(p,\ q_0)}{\partial p^2}=-C\frac{q_0^2}{p^3}<0.$$

Prin urmare, graficul funcției $R(p,\ q_0)$ are un maxim relativ în punctul $p_2=\sqrt{\frac{C}{B}}q_0$ (soluția $p=-\sqrt{\frac{C}{B}}q_0$ a fost eliminată



$$p_1 = \frac{A}{B} q_0 \ , \ p_2 = \sqrt{\frac{C}{B}} q_0$$

Fig. 2.4.6.

întrucît nu corespunde problemei), valoarea acestei maxim fiind dată de :

$$R_{\max}(p,\ q_0) = R(p_2,\ q_0) = 2(A - \sqrt{BC})q_0 > 0$$

Graficul curbei $R(p,\ q_0)$ este marcat pe fig. 2.4.6 prin linie punctată. În fine, din (2.4.4) rezultă că funcţia $M(p,\ q_0)$ variază liniar, graficul ei fiind o dreaptă de pantă negativă

$$\frac{\partial M(l,\ q_0)}{\partial p} = -2B < 0$$

Această dreaptă intersectează axa Op în punctul $p_1 = \frac{A}{B} q_0$, adică tocmai în punctul care corespunde maximului curbei producţiei. Totodată, această dreaptă întîlneşte curba produs mediu în punctul A, de abscisă $p_2 = \sqrt{\frac{C}{B}} q_0$, care corespunde maximului funcţiei produs marginal.

În acest punct, producţia medie şi cea marginală sînt egale şi are loc relaţia :

$$R(p_2,\ q_0)=M(p_2,\ q_0)=2(A-\sqrt{BC})q_0$$

Se poate spune deci că utilizarea „optimă" a factorului A și producția medie maximă cresc proporțional cu q_0 adică cu cantitatea folosită din factoșul B. Graficul funcției $M(p,\ q_0)$ este reprezentat în fig. 2.4.6. prin linie întreruptă cu punct.

Observație. Dacă vom considera factorul A fix și B variabil, adică $p=p_0$, rezultatele vor fi analoage.

4.5.2. *Elasticitate.*

În multe probleme economice este necesar să se exprime anumite mărimi prin valori care să fie independente de unitățile în care se măsoară variabilele problemei.

Aceasta se realizează prin considerarea variațiilor relative ale variabilelor respective. O noțiune care operează cu astfel de mărimi este cea de elasticitate.

a. *Elasticitatea unei funcții de o variabilă.*

Definiția 2.4.7. Fie $f: R_+\to R_+$ o funcție reală.

Se numește *variație relativă* a funcției f în punctul x, corespunzătoare creșterii Δx, expresia :

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$$

Dacă funcția f este derivabilă în punctul x, împărțind prin Δx $(\Delta x\neq 0)$ expresia de mai sus și trecînd la limită pentru $\Delta x\to 0$ vom obține :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{f(x)\Delta x}=\frac{1}{f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{f}\frac{df}{dx}$$

Mărimea $\frac{1}{f}\frac{df}{dx}$ măsoară viteza (rata) variației relative a funcției f în punctul x.

Fie acum $\frac{\Delta x}{x}$ variația relativă a lui x $(x\neq 0)$. Raportul

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}:\frac{\Delta x}{x}$$

Scanned with OKEN Scanner

definește viteza medie a variației relative a lui f pentru o variație relativă a lui x egală cu unitatea. Pentru $\Delta x \to 0$ obținem :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{f(x)} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \right) = \frac{x}{f} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \frac{df}{dx}$$

Definiția 2.4.8. Se numește elasticitate a funcției f în punctul x sau coeficient de elasticitate, mărimea :

$$E[f(x)] = \frac{x}{f(x)} \frac{df}{dx}$$

Elasticitatea unei funcții se mai notează și cu simbolul analog, derivării :

$$E[f(x)] = \frac{Ef}{Ex}$$

Observăm că $E[f(x)]$ este o mărime adimensională, care are ca interpretare viteza relativă de variație a funcției f în punctul x.

În plus, dacă ținem seama de definițiile funcțiilor valoare medie și valoare marginală, constatăm că elasticitatea $E(f)$ în punctul x nu este altceva decît raportul acestora din urmă :

$$E[f(x)] = \frac{M(x)}{R(x)}$$

Într-un punct în care $E[f(x)]=1$, valoarea medie și valoarea marginală a funcției f sînt egale, ceea ce, din punct de vedere economic are o anumită semnificație.

În fine, să mai observăm că formulele de calcul cu elasticități se obțin din formulele de derivare a funcțiilor de o variabilă. Astfel, dacă c este o constantă, atunci

$$E[f+c]=E[f],\ E[cf]=E[f],\ c \text{ — constantă.}$$

și

$$E[f \pm g] = \frac{fE[f] \pm gE[g]}{f+g}$$

$$E[fg]=E[f]+E[g],\ E\left[\frac{f}{g}\right]=E[f]-E[g] \text{ ș.a.m.d.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să demonstrăm, de exemplu, formula elasticității produsului a două funcții. Conform definiției 2.4.8., avem :

$$E[f \cdot g] = \frac{x}{fg} \frac{d(f \cdot g)}{dx} = \frac{x}{f \cdot g}\left(g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}\right) = \frac{x}{f}\frac{df}{dx} +$$

$$+ \frac{x}{g}\frac{dg}{dx} = E[f] + E[g].$$

Celelalte formule se deduc în manieră similară.

Elasticitatea cererii. Fie $u=f(p)$ funcția cererii pentru o marfă oarecare, p fiind prețul unitar iar u — cererea exprimată în anumite unități.

Elasticitatea funcției u caracterizează elasticitatea cererii în raport cu un preț oarecare dat și are expresia

$$E[f(p)] = \frac{p}{u}\frac{du}{dp}$$

Deoarece, după cum se dovedește în practică, $f(p)$ este o funcție descrescătoare (cînd prețul crește, cererea descrește), și deci $\frac{du}{dp} < 0$, pentru orice p, în calculele economice se adoptă ca măsură a coeficientului de elasticitate expresia $E[f]$, cu semn schimbat, adică

$$E_1[f(p)] = -\frac{p}{u}\frac{du}{dp} = -\frac{p}{u}\frac{df}{dp}$$

Dacă se notează cu g inversa funcției f, adică se consideră funcția $p=g(u)$, care de această dată semnifică dependența prețului de cerere, elasticitatea corespunzătoare a prețului (luată cu semn schimbat) ne va da mărimea :

$$E_1[g(u)] = -\frac{u}{p}\frac{dp}{du} = -\frac{u}{p}\frac{dg}{du}$$

Această mărime $E_1[g(u)]$ care definește viteza variației relative a prețului p în raport cu variația relativă a cererii u pentru o cerere dată, poartă, după unii autori, denumirea de *coeficient de flexibilitate al prețului* așa după cum mărimea

Scanned with OKEN Scanner

$E_1[f(p)]$ ar putea fi numit *coeficient de flexibilitate al cererii*. Consideraţii mai ample în legătură cu aceste probleme pot fi găsite în lucrare [1].

b. *Elasticităţi parţiale.*

Să presupunem că un proces economic este caracterizat analitic printr-o funcţie de două variabile: $z=f(x, y)$ şi că această funcţie admite derivate parţiale de ordinul întîi finite în toate punctele domeniului ei de definiţie $D \subset R^2$.

Considerînd pe y constant, $y=y_0$, funcţia $f(x, y_0)$ devine funcţie numai de variabila x şi putem defini elasticitatea sa în raport cu x. Tot la fel dacă fixăm pe x, $x=x_0$, $f(x_0, y)$ va fi funcţie numai de variabila y şi putem defini elasticitatea sa în raport cu y. Ajungem astfel la noţiunea de elasticitate parţială.

Definiţia 2.4. Fie $P_0(x_0, y_0) \in D$. Se numesc *elasticităţi parţiale* ale funcţiei f în punctul P_0 expresiile:

$$E_x[f(x_0, y_0)] = \frac{x_0}{f(x_0, y_0)} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

$$E_y[f(x_0, y_0)] = \frac{y_0}{f(x_0, y_0)} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Deoarece am presupus că funcţia $z=f(x, y)$ admite derivate parţiale în toate punctele domeniului D, putem defini funcţiile elasticităţii parţiale ale lui f şi anume:

$$E_x[f(x, y)] = \frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (x, y) \in D$$

$$E_y[f(x, y)] = \frac{y}{f} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Aplicaţie. Să considerăm un proces de producţie descris prin funcţia Cobb-Douglas bidimensională de forma:

$$f(x, y) = kx^{\lambda} y^{\mu}$$

Utilizînd formulele de mai sus, vom obţine:

$$E_x[f] = \frac{\lambda x}{kx^{\lambda} y^{\mu}} kx^{\lambda-1} yx^{\mu} = \lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

$$E_y[f] = \frac{\mu y}{kx^\lambda y^\mu} kx^\lambda y^{\mu-1} = \mu$$

Aşadar, constantele λ şi μ din funcţia Cobb-Douglas bidimensională au ca interpretare, elasticităţile parţiale ale funcţiei de producţie. Mai exact, $E_x[f]$ ne dă elasticitatea funcţiei de producţie raportată la o cantitate de muncă şi la un capital date atunci cînd cantitatea de muncă capătă o variaţie relativă egală cu unitatea, iar $E_y[f]$, ne va da elasticitatea funcţiei de producţie raportată la o cantitate de muncă şi un capital, date, atunci cînd capitalul suferă o variaţie relativă unitară.

Spre exemplu, dacă într-un proces de producţie, factorul y creşte cu 1% şi $\mu=0{,}4$, cum $E_y[f]=0{,}4$, va rezulta o creştere a producţiei faţă de un nivel dat cu 0,4%. Invers, dacă s-ar urmări o creştere a producţiei cu 0,3%, faţă de un nivel dat pe seama creşterii cantităţii de muncă cu 1%, vom avea $E_x[f]=0{,}3$ şi va rezulta $\lambda=0{,}3$. Avînd coeficienţii λ şi μ funcţia Cobb-Douglas ce caracterizează acest proces de producţie va avea forma :

$$f(x, y)=kx^{0{,}3}y^{0{,}4}$$

4.6. *Derivate parţiale de ordin superior.*

Să presupunem că funcţia $f: D\to R$, $D\subset R^2$, este derivabilă parţial în toate punctele domeniului D. Dacă derivatele parţiale $f'_x(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$ sînt, la rîndul lor, derivabile în raport cu x şi y, se pot defini derivatele parţiale ale acestor funcţii, aşa cum am făcut în §4, pct. 4.2.

Definiţia 2.4.4. Dacă există şi sînt finite limitele :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'_x(x_0+h, y_0)-f'_x(x_0, y_0)}{h} = f''_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f'_x(x_0, y_0+k)-f'_x(x_0, y_0)}{k} = f''_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'_y(x_0+h, y_0)-f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{k\to 0}\frac{f'_y(x_0, y_0+k)-f'_y(x_0, y_0)}{k}=f''_{yy}(x_0, y_0)=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

vom spune că funcţia f este de *două ori* derivabilă parţial în raport cu x şi y, iar numerele $f''_{xx}(x_0, y_0)$, $f''_{xy}(x_0, y_0)$, $f''_{yx}(x_0, y_0)$, $f''_{yy}(x_0, y_0)$ se numesc *derivatele de ordinul al doilea* ale funcţiei f în punctul $P_0(x_0, y_0)$. Derivatele $f''_{xx}(x_0, y_0)$ şi $f''_{yy}(x_0, y_0)$ se mai numesc derivate de ordinul al doilea ale funcţiei f în raport cu x, respectiv cu y, pe cînd, $f''_{xy}(x_0, y_0)$ şi $f''_{yx}(x_0, y_0)$ se numesc *derivate mixte.*

Dacă funcţia f admite derivate de ordinul al doilea finite în toate punctele unei mulţimi $D_1 \subseteq D$, acestea definesc funcţiile $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ care se numesc *derivatele de ordinul al doilea* ale funcţiei f pe mulţimea D_1.

Observaţie. Definind operatorii de derivare parţială $\frac{\partial}{\partial x}$ şi $\frac{\partial}{\partial y}$ putem interpreta derivatele parţiale ale funcţiei f drept rezultatul acţiunii acestor operatori asupra funcţiei f, astfel :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}(f)=\frac{\partial f}{\partial y}$$

Tot la fel, aplicînd aceşti operatori funcţiilor $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ avem :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Exemplu. Fie funcţia : $f(x, y)=x^2y+xy^2+x+y$. Avem :

$$f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+y^2+1$$

$$f'_y=\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2xy+1$$

Derivatele de ordinul al doilea, ale funcţiei f, vor fi :

Scanned with OKEN Scanner

$$f''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y$$

$$f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x+2y$$

$$f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x+2y$$

$$f''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x.$$

În acest exemplu, observăm că f''_{xy} care se obține prin derivarea funcției f'_x în raport cu y și f''_{yx} care se obține prin derivarea funcției f'_y în raport cu x sînt egale, cu alte cuvinte are loc proprietatea

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Spunem, în acest caz, că ordinea de derivare este intervertibilă (interschimbabilă).

Această proprietate nu este însă adevărată pentru o funcție oarecare $f(x, y)$. Pentru a ne convinge de acest lucru să considerăm următorul exemplu:

Fie funcția

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0),\\ 0 & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\,\frac{x^2-y}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\,\frac{x^2-y}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Dînd lui x și y succesiv valoarea zero, obținem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)=-y$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0)=x$. Derivînd parțial în raport cu y și

Scanned with OKEN Scanner

respectiv în raport cu x, și calculînd derivatele mixte de ordinul al doilea în punctul $0(0, 0)$, vom obține

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$$

Constatăm deci că $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Prin urmare, este natural să se pună problema și să se găsească acele condiții în care derivatele mixte sînt egale. (ordinea de derivare se poate interverti). Astfel de condiții (suficiente) sînt date de teorema :

Teorema 2.4.1. (H. A. Schwarz). Dacă derivatele f'_x, f'_y și f''_{xy}, f''_{yx} există într-o vecinătate a punctului $P_0(x_0, y_0)$ și dacă f''_{yx} și f''_{xy} sînt *continue* în P_0, atunci are loc egalitatea :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [6].

Revenind la exemplul de la p. 101 putem verifica ușor că ipotezele teoremei de mai sus sînt satisfăcute, ceea ce justifică egalitatea derivatelor mixte și, deci, intervertirea ordinei de derivare este posibilă, așa cum am găsit.

Observație. Funcția $f(x, y)$ posedă două derivate parțiale de ordinul întîi și, în general, patru derivate de ordinul al doilea, dar dacă f satisface condițiile teoremei lui Schwarz, numărul derivatelor de ordinul al doilea independente se reduce la trei.

Să considerăm acum o funcție de n variabile $u = f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$. Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției f se definesc în manieră similară cazului funcțiilor de două variabile Pentru aceste derivate se utilizează notațiile : $f''_{x_1x_1}, \dots, f''_{x_ix_j}, \dots, f''_{x_nx_n}$ sau mai pe scurt : $f''_{x_ix_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i+j=2$ Pentru $i=j$ se obțin derivatele de ordinul al doilea, în raport cu x_i, $i=\overline{1, n}$, iar pentru $i \neq j$ se obțin derivatele mixte. În general, numărul derivatelor parțiale de ordinul doi al funcției f este n^2, iar dacă funcția f satisface condiții similare celor din teorema lui Schwarz, numărul acestora se reduce deoarece se demonstrează că numărul derivatelor mixte de ordinul al doilea independente este egal cu $\frac{1}{2} n(n-1)$, unde n este numărul variabilelor.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției $z=f(x, y)$ sînt la rîndul lor derivabile în raport cu fiecare variabilă pe o mulțime $D_1 \subseteq D$, se pot defini derivatele parțiale de ordinul trei, patru etc.

În general, pentru derivatele parțiale de ordin m oarecare pentru funcția $f(x, y)$ se folosește notația:

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, \text{ unde } \alpha+\beta=m$$

Derivatele parțiale de ordin m ale unei funcții de n variabile se notează cu:

$$\frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_m}}, \text{ unde } \alpha_1+\alpha_2+ \ldots +\alpha_m=m,$$

Exemplu. Fie $f(x_1, x_2, x_3)=e^{x_1+2x_2+3x_3}$. Să calculăm derivatele acestei funcții pînă la ordinul trei inclusiv. Avem:

$$f'_{x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}=e^u, \quad f'_{x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=2e^u, \quad f'_{x_3}=\frac{\partial f}{\partial x_3}=3e^u,$$

$$u=x_1+2x_2+3x_3$$

$$f''_{x_1^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^3}=e^u; \quad f''_{x_2^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=4e^u; \quad f''_{x_3^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=9e^u,$$

$$f''_{x_1x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}=2e^u; \quad f''_{x_1x_3}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}=3e^u;$$

$$f''_{x_2x_3}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}=6e^u;$$

$$f'''_{x_1^3}=\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^3}=e^u; \quad f'''_{x_2^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}=8e^u; \quad f'''_{x_3^3}=5\frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3}=27e^u;$$

$$f'''_{x_1x_2^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 x_1}=4e^u; \quad f'''_{x_1x_3^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_3^2 x_1}=9e^u;$$

$$f'''_{x_2x_3^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_3^2 \partial x_2}=18e^u; \quad f'''_{x_1^2x_3}=\frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}=2e^u;$$

$$f'''_{x_1^2x_3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1^2}=3e^u; \quad f'''_{x_2^2x_3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2^2}=12e^u.$$

Scanned with OKEN Scanner

Toate aceste derivate au același domeniu de definiție ca și funcția f, adică $D=R^3$.

Derivatele de ordin m cu $m>2$ se numesc *derivate de ordin superior* ale funcției date.

§5. DIFERENȚIALELE FUNCȚIILOR DE n VARIABILE

5.1. *Preliminarii.*

Amintim noțiunea de funcție diferențiabilă de o variabilă reală.

Fie $f: I\to R$, și $x_0\in I$. Vom nota cu h creșterea argumentului x. Expresia

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$$

poartă numele de *creșterea totală* a funcției f în punctul x_0.

Definiția 2.5.1. Funcția f se numește *diferențiabilă* în punctul x_0 dacă există o constantă A și o funcție $\alpha(x_0, h)$ cu proprietățile $\alpha(x_0, 0)=0$ și $\lim\limits_{h\to 0}(x_0, h)=0$, astfel încît creșterea totală a funcției $\Delta f(x_0)$ să se poată scrie sub forma:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+h\alpha(x_0, h). \tag{2.5.1}$$

În teoria funcțiilor de o variabilă se demonstrează că dacă f este diferențiabilă în punctul x_0, atunci ea este derivabilă în x_0 iar constanta A este tocmai derivata funcției f în punctul x_0, adică:

$$A=f'(x_0)$$

De asemenea, are loc și afirmația reciprocă care spune că dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci ea este și diferențiabilă în acest punct.

Expresia liniară în h, din formula (2.5.1) poartă numele de *diferențiala funcției* f în punctul x_0 și se notează cu $df(x_0)$:

$$df(x_0)=Ah$$

Cum $A=f'(x_0)$, se mai poate scrie:

$$df(x_0)=f'(x_0)h.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă considerăm funcția identică $g(x)=x$, observăm că

$$dg(x_0)=g'(x_0)h=h=dx$$

și prin urmare diferențiala funcției f va fi dată de formula

$$df(x_0)=f'(x_0)dx. \tag{2.5.2}$$

În cazul în care funcția f este diferențiabilă în toate punctele unei mulțimi, $I_1\subset I$, spunem că f este diferențiabilă pe I_1. Expresia

$$df(x)=f'(x)dx, \qquad x\in I_1$$

poartă numele de *diferențiala* funcției f pe mulțimea I_1.

5.2. *Diferențiala de ordinul întîi pentru o funcție de n variabile.*

Vom considera mai întîi cazul funcțiilor de două variabile.

Fie, $z=f(x, y)$ o funcție definită pe un domeniu $D\subset R^2$ și $P_0(x_0, y_0)$ un punct interior acestei mulțimi.

Dăm simultan variabilelor x și y creșterile h și k, adică ne deplasăm din punctul $P_0\in D$ în punctul $P'(x_0+h,\ y_0+k)\in \in D$. Expresia

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0, y_0)$$

se numește *creșterea totală* a funcției f în punctul P_0.

În particular, dacă luăm pe rînd $k=0$ și $h=0$ regăsim definițiile date creșterilor parțiale $\Delta_x f$ și $\Delta_y f$, definite în paragraful 4.2.

Definiția 2.5.2. Funcția $f(x, y)$ se numește *diferențiabilă total* în punctul $P_0(x_0, y_0)$ dacă oricare ar fi creșterile h și k, creșterea totală a funcției se poate scrie sub forma :

$$\Delta f(P_0)\equiv f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0, y_0)=Ah+Bk+ \\ +h\alpha(P_0\,;\,h, k)+k\beta(P_0\,;\,h, k) \tag{2.5.3}$$

în care A și B sînt constante precizate, depinzînd numai de punctul P_0, iar $\alpha(P_0\,;\,h, k)$ și $\beta(P_0\,;\,h, k)$ sînt două funcții de creșterile h și k cu proprietățile:

$$\alpha(P_0\,;\,0, 0)=0 \qquad \beta(P_0\,;\,0, 0)=0$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \alpha(P_0\,;\,h, k)=0 \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \beta(P_0\,;\,h, k)=0$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.5.3. Dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul P_0, expresia $Ah+Bk$ liniară în creșterile h și k, se numește *diferențiala totală* a funcției f în punctul P_0 și se notează cu $df(x_0, y_0)$:

$$df(x_0, y_0)=Ah+Bk \tag{2.5.4}$$

Teoremă 2.5.1. Dacă f este diferențiabilă în punctul $P_0(x_0, y_0)$, atunci ea este derivabilă parțial în raport cu x și y în acest punct, constantele A și B din expresia diferențialei totale fiind tocmai valorile derivatelor parțiale în punctul P_0 :

$$A=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \qquad B=\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}$$

Demonstrație. Să scriem formula (2.5.3) în cazul $k=0$ și $h\neq 0$ variabil, vom avea

$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)=Ah+h\alpha(P_0; h, 0)$$

sau

$$\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}-A=\alpha(P_0; h, 0)$$

Trecînd la limită pentru $h\to 0$, și ținînd seama că $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(P; h, 0)=0$, obținem

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}=A$$

Cum limita din membrul stîng definește derivata parțială în raport cu x a funcției f, iar membrul drept este finit, urmează că funcția f este derivabilă parțial în raport cu x în P_0 și are loc relația:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=A$$

Printr-un raționament analog, considerînd de acestă dată $h=0$, și $k\neq 0$ variabil, deducem că funcția f este derivabilă parțial în raport cu y în P_0 și :

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=B$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de acestă teoremă, expresia diferenţialei funcţiei f, dată de (2.5.4) capătă forma :

$$df(P_0)=h\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}+k\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}$$

sau, notînd $h=dx$ şi $k=dy$:

$$df(P_0)=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}dy \tag{2.5.5}$$

Observăm că această formulă este extensiunea formulei (2.5.2) din cazul funcţiilor deo variabilă. Într-adevăr, dacă f nu ar depinde de y, atunci $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=f'(x)$ şi din (2.5.5) obţinem formula (2.5.2).

Am amintit că, în cazul funcţiilor de o variabilă, noţiunile de derivabilitate şi diferenţiabilitate sînt echivalente. Această proprietate nu se mai păstrează pentru funcţiile de două sau mai multe variabile. Cu alte cuvinte, teorema 2.5.1 nu admite o reciprocă putîndu-se da exemple în care f este derivabilă parţial în raport cu x şi y dar nu este diferenţiabilă total în punctul P_0.

Următoarea teoremă stabileşte condiţiile în care o funcţie care este derivabilă în raport cu x şi y, este diferenţiabilă total.

Teorema 2.5.2. Dacă funcţia $f(x, y)$ este derivabilă parţial în raport cu x şi y în punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi dacă derivatele parţiale sînt *continue* în P_0, atunci funcţia f este diferenţiabilă în P_0.

Demonstraţia acestei teoreme poate fi găsită în [11].

Alte proprietăţi ce decurg din proprietatea unei funcţii de a fi diferenţiabilă într-un punct sînt următoarele :

a) Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul $P_0(x_0, y_0)$, atunci ea este continuă în raport cu ansamblul argumentelor în acest punct.

Într-adevăr, trecînd la limită în formula (2.5.1) obţinem

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}[f(x_0+h, y_0+h)-f(x_0, y_0)]=0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)$$

ceea ce ne arată că limita funcției este egală cu valoarea funcției, în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$ și deci funcția $f(x,\ y)$ este continuă în acest punct.

b) Tot din formula (2.5.1) se poate vedea că pentru h și k suficient de mici, adică atunci cînd punctul $P(x_0+h,\ y_0+k)$ se află în vecinătatea punctului $P_0(x_0,\ y_0)$, ultimii doi termeni pot fi neglijați în raport cu primii doi datorită proprietăților funcțiilor $\alpha(P_0\ ;\ h,\ k)$ și $\beta(P_0\ ;\ h,\ k)$ și se poate face aproximarea :

$$\Delta f(x_0,\ y_0)\simeq df(x_0,\ y_0) \tag{2.5.6}$$

Această formulă ne permite să afirmăm că pentru valori suficient de mici ale creșterilor h și k, creșterea funcției în punctul P_0 poate fi aproximată cu diferențiala ei în acest punct. Această proprietate este deosebit de importantă în calcule practice.

Exemplul 4. Să considerăm un proces de producție care se defășoară după o lege Cobb-Douglas în care $\alpha=\frac{1}{2}$, deci

$$u(x,\ y)=kx^{1/2}\ y^{1/2}$$

Presupunem că pornim cu valorile $(x_0,\ y_0)$ ale parametrilor lor x și y, și că acestea suferă variații de 2% și, respectiv 5%. Ne propunem să calculăm care este variația (creșterea) pozitivă sau negativă, a producției, adică a funcției u. Vom aplica formula de aproximare (2.5.6) :

$$\Delta u(x_0,\ y_0)\simeq du(x_0,\ y_0)$$

Calculăm diferențiala funcției u. Avem :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{k}{2}x^{-\frac{1}{2}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{k}{2}\ y^{-\frac{1}{2}},\quad dx=0{,}02\ \ dy=0{,}05.$$

Deci :

$$du(x_0,\ y_0)=\frac{k}{2}(2x_0^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}02+y_0^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}05)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare :

$$du(x_0, y_0) = \frac{k}{200}\left(2x_0^{-\frac{1}{2}} + 5y_0^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Dacă am lua $x_0=1$, $y_0=1$ (lucru care se poate face prin schimbarea convenabilă a unităților de măsură pentru x și y) vom obține :

$$\Delta u(1, 1) = \frac{7k}{200}$$

Pe de altă parte, cum $u(x_0, y_0)=u(1, 1)=k$, putem scrie

$$\Delta u(1, 1) = \frac{7}{200}\, u(1, 1)$$

Rezultă că variația relativă a producției în punctul (1,1) este :

$$\frac{\Delta u(1, 1)}{u(1, 1)} = \frac{7}{200} = 3{,}5\%$$

Întrucît $x>0$, $y>0$, și $dx>0$, $dy>0$, raportul de mai sus indică efectiv o creștere a producției cu 3,5% față de nivelul $u(1, 1)$.

Dacă funcția f este diferențiabilă în orice punct $(x, y) \in D_1 \subset D$, vom spune că f este diferențiabilă pe D_1, expresia

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

numindu-se diferențiala funcției f pe mulțimea D_1.

Noțiunea de diferențială pentru funcțiile de două variabile se generalizează în mod natural la funcțiile de n variabile astfel :

Definiția 2.5.4. Fie $f : D \to R$, $D \subset R^n$, o funcție de n variabile și $P_0(x_2^0, x_2^0 \ldots, x_n^0) \in D$. Vom spune că funcția f este *diferențiabilă* în punctul P_0, dacă oricare ar fi creșterile $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ale variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, creșterea totală a funcției f se scrie sub forma :

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare :

$$du(x_0, y_0) = \frac{k}{200}(2x_0^{-\frac{1}{2}} + 5y_0^{-\frac{1}{2}})$$

Dacă am lua $x_0=1$, $y_0=1$ (lucru care se poate face prin schimbarea convenabilă a unităților de măsură pentru x și y) vom obține :

$$\Delta u(1, 1) = \frac{7k}{200}$$

Pe de altă parte, cum $u(x_0, y_0)=u(1, 1)=k$, putem scrie

$$\Delta u(1, 1) = \frac{7}{200} u(1, 1)$$

Rezultă că variația relativă a producției în punctul (1,1) este :

$$\frac{\Delta u(1, 1)}{u(1, 1)} = \frac{7}{200} = 3{,}5\%$$

Întrucît $x>0$, $y>0$, și $dx>0$, $dy>0$, raportul de mai sus indică efectiv o creștere a producției cu 3,5% față de nivelul $u(1, 1)$.

Dacă funcția f este diferențiabilă în orice punct $(x, y) \in D_1 \subset D$, vom spune că f este diferențiabilă pe D_1, expresia

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

numindu-se diferențiala funcției f pe mulțimea D_1.

Noțiunea de diferențială pentru funcțiile de două variabile se generalizează în mod natural la funcțiile de n variabile astfel :

Definiția 2.5.4. Fie $f : D \to R$, $D \subset R^n$, o funcție de n variabile și $P_0(x_2^0, x_2^0 ..., x_n^0) \in D$. Vom spune că funcția f este *diferențiabilă* în punctul P_0, dacă oricare ar fi creșterile $h_1, h_2, ..., h_n$ ale variabilelor $x_1, x_2, ..., x_n$, creșterea totală a funcției f se scrie sub forma :

Scanned with OKEN Scanner

$$\Delta f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \equiv f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n) -$$

$$-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)h_i + \tag{2.5.7}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i(x_1^0, \ldots, x_n^0; h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

în care constantele A_i, $i=\overline{1, n}$ sînt determinate și depind numai de punctul P_0, iar funcțiile $\alpha_i(x_1^0, .., x_n^0, h_1, \ldots, h_n)$ sînt astfel încît :

$$\alpha_i(x_1^0, .., x_n^0; 0, 0, .., 0)=0,$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0\\ \ldots\\ h_n\to 0}} \alpha_i(x_1^0, .., x_n^0; h_1, h_2, \ldots, h_n)=0, \quad i=\overline{1, n}$$

Expresia liniară în creșterile h_i (prima sumă din (2.5.7)) se numește *diferențiala* funcției f în punctul P_0.

Deci

$$df(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \sum_{=1}^{n} h_i A_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) \tag{2.5.8}$$

Ca și în cazul funcțiilor de două variabile putem demonstra că dacă funcția f este diferențiabilă în punctul P_0, atunci constantele A_i din (2.5.7) sînt date de valorile derivatelor parțiale ale funcției f în punctul P_0 :

$$A_i = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i}, \quad i=\overline{1, n}$$

Înlocuind constantele A_i în (2.5.8), expresia diferențialei $df(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ devine :

$$df(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} \tag{2.5.9}$$

Dacă notăm $h_1=dx_1$, $h_2=dx_2$, ..., $h_n=dx_n$, și scriem dezvoltat suma din membrul al doilea, vom obține o formă echivalentă a expresiei (2.5.9), și anume :

$$df(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} dx_n$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, se menţin proprietăţile a) şi b) ce decurg din diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul P_0.

Ca şi în cazul funcţiilor de două variabile, dacă funcţia f este diferenţiabilă în orice punct $(x_1, x_2, .., x_n) \in D_1 \subset D$, spunem că f este *diferenţiabilă* pe D_1 iar expresia

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

se numeşte *diferenţialul* funcţiei f pe mulţimea D_1.

Menţionăm că în expresia de mai sus a diferenţialei, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sînt fixate constituind coordonatele punctului curent în care se calculează aceasta, în timp ce creşterile $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ sînt arbitrare.

Observaţie. Regulile de calcul cu diferenţiale totale cunoscute de la funcţiile de o variabilă se extind cu uşurinţă la funcţiile de n variabile.

Astfel, dacă funcţiile f şi g sînt diferenţiabile total în punctul $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, atunci :

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(cf) = cdf, \quad (c = \text{const.})$$

(2.5.10)
$$d(f \cdot g) = gdf + fdg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Aceste formule prezintă importanţă în unele calcule practice, cum ar fi cele referitoare la evaluarea erorilor experimentale.

Exemplul 2. Să reluăm problema din exemplul 1. Avem

$$\Delta u(x_0, y_0) \simeq du(x_0, y_0) = d(kx^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}})_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Dar, conform formulei care dă diferenţiala produsului funcţiilor $f = (kx)^{1/2}$ şi $g = (ky)^{1/2}$, vom avea :

$$d(kx^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}})_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{k}{2} x_0^{-\frac{1}{2}} y_0^{\frac{1}{2}} dx + \frac{k}{2} x_0^{\frac{1}{2}} y_0^{-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \frac{k}{200} (2x_0^{-\frac{1}{2}} y_0^{\frac{1}{2}} + 5x_0^{\frac{1}{2}} y_0^{-\frac{1}{2}})$$

Pentru $x_0 = y_0 = 1$, rezultă

$$d(kx^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}})_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{7k}{200} = \Delta u(1, 1)$$

şi avem acelaşi rezultat ca în exemplul considerat.

Scanned with OKEN Scanner

5.3. *Diferențiale de ordin superior.*

Dacă funcția $df(x, y)$ ca funcție de x și y este, la rîndul ei, diferențiabilă în punctul $P_0(x_0, y_0)$, spunem că f este *de două ori diferențiabilă* în P_0 și notăm cu $d^2f(P_0)$ *diferențială de ordinul al doilea* a funcției f. Prin urmare :

$$d^2f(P_0)=d(df(x, y))_{\substack{y=x_0\\ y=y_0}}$$

Ținînd seama de expresia diferențialei de ordinul întîi dată de formula (2.5.5) și de regulile de diferențiere (2.5.10), se poate arăta cu ușurință că :

$$(2.5.11)\quad d^2f(P_0)=\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial y^2}k^2$$

Notînd ca și mai sus $h=dx$, $k=dy$, mai putem scrie expresia diferențialei a doua, sub forma :

$$d^2f(P_0)=\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial x^3}dx^2+2\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial y^2}dy^2$$

Expresia (2.5.11) se poate pune sub o formă condensată, deosebit de utilă pentru cele ce urmează, prin folosirea operatorilor de derivare parțială $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial y}$ și anume :

$$(2.5.12)\qquad d^2f(P_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(P_0)$$

Binomul $h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ la puterea simbolică 2 se aplică funcției f în punctul P_0 cu următoarele convenții : creșterile h și k fiind numere se ridică la puterea a doua în mod obișnuit ; „Puterile“ și „produsele“ operatorilor $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, se interpretează ca ordin de derivare a funcției f, în raport cu argumentele respective, astfel :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2f(P_0)\equiv\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial x^2},\quad\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)f(P_0)\equiv\frac{\partial^2f(P_0)}{\partial x\partial y},\ldots$$

Ținînd seama de această observație, prin efectuarea operațiilor din membrul al doilea al formulei 2.5.12, obținem tocmai expresia (2.5.11) a diferențialei funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul funcțiilor de n variabile, expresia diferențialei de ordinul al doilea, se poate scrie sub o formă asemănătoare cu (2.5.12), și anume:

$$d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} f(x_1^0, \ldots, x_n^0) \tag{2.5.13}$$

menținînd aceleași observații în legătură cu ridicarea la puterea simbolică a doua a expresiei dintre paranteze.

Exemplu. Fie $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_3 x_2$. Să calculăm $d^2f(1, -1, 1)$. Avem:

$$d^2f(1, -1, 1) = h_1^2 \frac{\partial^2 f(1, -1, 1)}{\partial x_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(1, -1, 1)}{\partial x_2^2} +$$

$$+ h_3^2 \frac{\partial^2 f(1, -1, 1)}{\partial x_3^2} + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 f(1, -1, 1)}{\partial x_1 \partial x_2} +$$

$$+ 2h_1h_3 \frac{\partial^2 f(1, -1, 1)}{\partial x_1 \partial x_3} + 2h_2h_3 \frac{\partial^2 f(1, -1, 1)}{\partial x_2 \partial x_3} =$$

$$= 2h_1^2 - 6h_2^2 + 2h_2h_3 = 2(h_1^2 - 3h_2^2 + h_2h_3).$$

Să presupunem acum că funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este diferențiabilă de $l-1$ ori în vecinătatea punctului $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$.

Definiția 2.5.5. Vom spune că funcția f este diferențiabilă de l ori în punctul P_0, dacă diferențiala de ordin $l-1$ este la rîndul ei diferențiabilă în $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Expresia

$$d^lf(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = d[d^{l-1}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{\substack{x_1 = x_1^0, \\ x_2 = x_2^0, \\ \ldots \\ x_n = x_n^0}}$$

se numește *diferențiala de ordin l* a funcției f în punctul P_0.

Se poate arăta fără dificultate că diferențiala de ordin l a funcției f este dată de formula

Scanned with OKEN Scanner

$$d^l f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \right.$$

(2.5.14)

$$\left. + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(l)} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

în care paranteza se calculează conform convenției de ridicare la puterea simbolică l.

Exemplu. Se dă funcția $f(x, y)=x^4+x^3y^3+y^4$. Să se calculeze $d^3f(1, -1)$, dacă $h=0{,}1$ și $k=0{,}2$.

Conform formulei (2.5.14), pentru $l=3$, vom avea:

$$d^3f(x_0, y_0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(x_0, y_0) = h^3 \frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x^3} +$$

$$+3h^2k \frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial y^3}.$$

Calculînd derivatele parțiale de ordinul al treilea ale funcției f în punctul $(x_0, y_0)=(1, -1)$ și înlocuind mai sus, obținem

$$d^3f(1, -1) = 18h^3 + 54h^2k - 54hk^2 - 18k^3 =$$
$$= 18(h^3 + 3h^2k - 3hk^2 - k^3) = 18(0.001 + 0{,}006 - 0{,}0012 -$$
$$- 0{,}008) = 0{,}234.$$

5.4. *Derivarea funcțiilor compuse.*

5.4.a. *Prima formulă de derivare.*

Fie $f(x, y)$ o funcție definită pe $D \subset R^2$, $P_0(x_0, y_0) \in D$ și funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ definite pe mulțimea $I \in R$ astfel încît pentru $t=t_0 \in I$, au loc relațiile:

$$x(t_0)=x_0, \quad y(t_0)=y_0,$$

Funcția

$$F(t)=f((x(t), y(t))$$

se numește *funcție compusă* a funcției $f(x, y)$ cu funcțiile $x(t)$ și $y(t)$. Se pune problema de a studia derivabilitatea funcției $F(t)$ și de a stabili o formulă de calcul a derivatei ei. Răspunsul la această problemă este dat de următoarea teoremă.

Teorema 2.5.6. Dacă f'_x și f'_y există în vecinătatea punctului $P_0(x_0, y_0)$ și sînt continue în acest punct, iar funcțiile

Scanned with OKEN Scanner

$x(t)$ şi $y(t)$ sînt derivabile în punctul t_0, atunci fucţia $F(t)$ este derivabilă în t_0 şi are loc formula :

$$F'(t_0)=f'_x(x_0,\ y_0)x'(t_0)+f'_y(x_0,\ y_0)y'(t_0). \tag{2.5.14}$$

Demonstraţie. Să notăm cu τ creşterea argumentului t şi să punem :

$$h(\tau)=x(t_0+\tau)-x(t_0),\qquad k(\tau)=y(t_0+\tau)-y(t_0)$$

Presupunem că τ este atît de mic încît punctul de coordonate $(x_0+h(\tau), y_0+k(\tau))$ să aparţină vecinătăţii considerate a punctului P_0. Avem :

$$\frac{F(t_0+\tau)-F(t_0)}{\tau}=\frac{f[x(t_0+\tau),\ y(t_0+\tau)-f[x(t_0),\ y(t_0)]}{\tau}=$$

$$=\frac{f[x(t_0)+h(\tau),\ y(t_0)+k(\tau)]-f[x(t_0),.\ y(t_0)]}{\tau}= \tag{2.5.15}$$

$$=\frac{f[x_0+h(\tau),\ y_0+k(\tau)]-f(x_0,\ y_0)}{\tau}$$

Deoarece, în baza teoremei 2.5.2, funcţia f este diferenţiabilă în punctul $P_0(x_0,\ y_0)$, conform formulei (2.5.3), avem

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0)h+f'_y(x_0,\ y_0)k+ \tag{2.5.16}$$
$$+h\alpha(P_0;\ h,\ k)+k\beta(P_0;\ h,\ k)$$

unde

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\alpha(P_0;\ h,\ k)=0,\quad \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\beta(P_0;\ h,\ k)=0,\quad \alpha(P_0,\ 0,\ 0)=0, \tag{2.5.16}'$$
$$\beta(P_0;\ 0,\ 0)=0,$$

Pe de altă parte, funcţiile $x(t)$, $y(t)$ fiind derivabile în t_0,

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{h(\tau)}{\tau}=x'(t_0),\quad \lim_{\tau\to 0}\frac{k(\tau)}{\tau}=y'(t_0) \tag{2.5.16}''$$

Substituind (2.5.16) în (2.2.15) şi trecînd la limită în ambii membrii, pentru $\tau\to 0$, obţinem :

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{F(t_0+\tau)-F(t_0)}{\tau}=f_x(x_0,\ y_0)\lim_{\tau\to 0}\frac{h(\tau)}{\tau}+$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+f'_y(x_0, y_0)\lim_{\tau\to 0}\frac{k(\tau)}{\tau}+\lim_{\tau\to 0}\alpha(P_0; h(\tau), k(\tau))+$$
$$\lim_{\tau\to 0}\beta(P_0; h(\tau), k(\tau)).$$

În baza relațiilor (2.5.1 6)', (2.5.16)'' și a faptului că

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{F(t_0+\tau)-F(t_0)}{\tau}=F'(t_0)$$

rezultă formula din enunțul teoremei.

Observație. Dacă în formula (2.5.14) înlocuim pe t_0 prin t și (x_0, y_0) prin (x, y), obținem formula generală de calcul a derivatei funcției compuse $F(t)$:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2.5.17}$$

În cazul funcțiilor de n variabile această formulă devine:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \tag{2.5.17'}$$

Exemplu. Fie $f(x, y)=2x^2+y^2$ și $x=\sin t$, $y=\cos t$. Avem:

$$f'_x=4x,\ f'_y=2y,\ x'_y(t)=\cos t,\ y'(t)=-\sin t.$$

Aplicînd formulei (2.5.17) funcției $F(t)=f(\sin t, \cos t)$, obținem:

$$\frac{dF}{dt}=F'(t)=4\sin t\cos t+2\cos t(-\sin t)=2\sin t\cos t=\sin 2t,$$

Cazuri particulare.

1. Compunînd funcția $f(x, y)$ cu funcțiile $x=x$ și $y=y(x)$, se obține funcția:

$$F(x)=f(x, y(x))$$

Conform formulei de derivare (2.5.17), derivata funcției $F(x)$ va fi dată de:

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y' \tag{2.5.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Să luăm acum pentru funcțiile $x(t)$ și $y(t)$, expresiile

$$x(t)=x_0+ht,\quad y(t)=y_0+kt$$

în care (x_0, y_0) sînt coordonatele unui punct arbitrar P_0 aparținînd domeniului de definiție al funcției $f(x, y)$, h și k fiind constante. Se obține funcția compusă:

$$F(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt)$$

Conform aceleiași formule (2.5.17), vom avea:

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)}f(P_0)$$

Se poate demonstra, de asemenea, și formula mai generală care dă derivata de ordinul n a funcției $F(t)$. Aceasta este:

$$(2.5.19)\qquad F^{(n)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x_0+ht,\ y_0+kt))$$

2.4.b. *A doua formulă de derivare.*

Fie $f(x, y)$ o funcție definită în domeniul $D\subset R^2$. Să presupunem acum că x și y sînt, la rîndul lor, funcții de variabilele u și v: $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ definite pe domeniul $\Delta\subset R^2$. Putem defini funcția compusă

$$F(u,\ v)=f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]$$

care realizează corespondența de la mulțimea Δ la mulțimea numerelor reale, fig. 2.5.1.

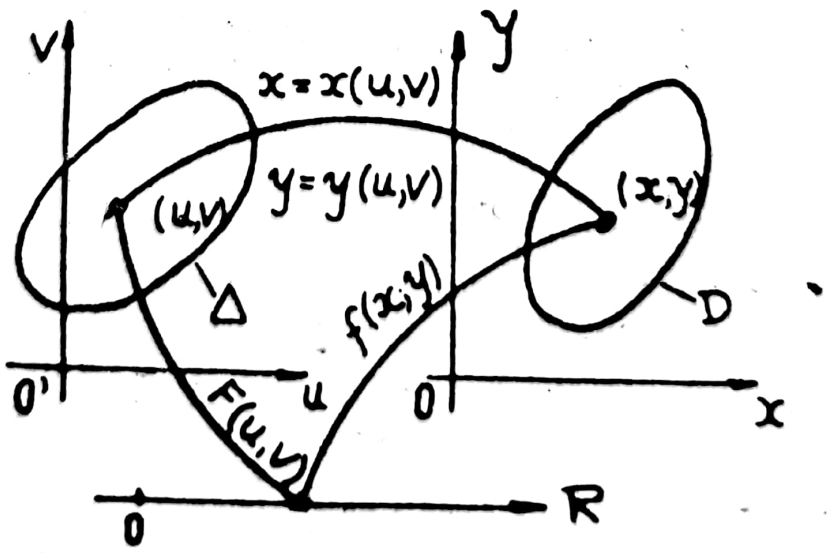


Fig. 2.5.1

Scanned with OKEN Scanner

Fie $Q_0(u_0, v_0)$ un punct al domeniului Δ și

$$x_0 = x(u_0, v_0), \qquad y_0 = y(u_0, v_0). \tag{2.5.20}$$

Teorema 2.5.7. Dacă funcția $f(x, y)$ admite derivate parțiale f'_x, f'_y continue în punctul $P_0(x_0, y_0)$ iar funcțiile $x(u, v)$ și $y(u, v)$ sînt derivabile parțial în punctul $Q_0(u_0, v_0)$, atunci funcția $F(u, v)$ este derivabilă parțial în raport cu u și v în punctul Q_0 și derivatele parțiale ale acesteia sînt date de formulele :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

În formulele de mai sus, derivatele $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ $\frac{\partial y}{\partial v}$, sînt calculate în punctul $Q_0(u_0, v_0)$, iar $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$, sînt calculate în punctul $P_0(x_0, y_0)$ în care x_0 și y_0 sînt date de formulele (2.5.20).

Formulele (2.5.21) se extind cu ușurință la cazul funcțiilor de n variabile.

Fie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcție definită pe domeniul $D \subset R^n$ și $x_1 = x_1(t_1, t_2, ..., t_n)$, ..., $x_n = x_n(t_1, t_2, ..., t_n)$ definite pe domeniul $\Delta \subset R^n$. Prin compunerea funcției f cu funcțiile x_1, x_2 ..., x_n se obține funcția

$$F(t_1, t_2, ..., t_n) = f[x_1(t_1, t_2, ..., t_n), x_2(t_1, t_2, ..., t_n), ..., x_n(t_1, t_2, ..., t_n)].$$

definită Δ pe cu valori în R.

În ipoteze similare acelora din teorema de mai sus, cu privire la derivatele parțiale ale funcției f și ale derivatelor funcțiilor x_1, x_2, ..., x_n în raport cu variabilele t_1, t_2, ..., t_n, au loc formulele de derivare :

Scanned with OKEN Scanner

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\
\frac{\partial F}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial F}{\partial t_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n}.
\end{aligned}
\tag{2.5.22}
$$

Exemplu. Fie $f(x, y)=x\sin y+y\sin x$ și $x(t_1, t_2)=t_1+t_2^2$, $y(t_1, t_2)=t_1^2+t_2$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției compuse:

$$F(t_1, t_2)=x(t_1, t_2)\sin y(t_1, t_2)+y(t_1, t_2)\sin x(t_1, t_2).$$

Mai întîi avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin y+y\cos x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y+\sin x.$$

$$\frac{\partial x}{\partial t_1}=1, \quad \frac{\partial x}{\partial t_2}=2t_2, \quad \frac{\partial y}{\partial t_1}=2t_1, \quad \frac{\partial y}{\partial t_2}=1.$$

Aplicînd formula (2.5.21) în care u și v se înlocuiesc cu t_1 și t_2, sau formula (2.5.22) în cazul $n=2$, obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}=(\sin y+y\cos x)_{\substack{x=t_1+t_2^2\\ y=t_1^2+t_2}}\cdot 1+(x\cos y+\sin x)_{\substack{x=t_1+t_2^2\\ y=t_1^2+t_2}}\cdot 2t_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}=(\sin y+y\cos x)_{\substack{x=t_1+t_2^2\\ y=t_1^2+t_2}}\cdot 2t_2+(x\cos y+\sin x)_{\substack{x=t_1+t_2^2\\ y=t_1^2+t_2}}\cdot 1.$$

5.5. *Formula lui Taylor pentru funcții de n variabile.*

Considerăm mai întîi cazul funcțiilor de două variabile. Fie funcția $f(x, y)$ definită pe domeniul $D\subset R^2$ și $P_0(x_0, y_0)$ un punct interior lui D. Presupunem că f are toate derivatele parțiale pînă la ordinul m continue în punctul P_0, iar deri-

Scanned with OKEN Scanner

vatele parțiale de ordin $m+1$ există în vecinătatea punctului P_0. Să punem

$$x=x_0+ht$$

$$y_0=y_0+kt$$

parametrul t luînd valori în intervalul $[0, 1]$. Alegem constantele h și k astfel încît punctul $P(x_0+ht,\ y_0+kt)$ să aparțină lui D. Dacă h și k sînt suficient de mici, punctul P se va găsi în vecinătatea punctului P_0.

Considerăm acum funcția auxiliară $\varphi(t):[0,\ 1]\to R$ definită astfel:

$$\varphi(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt) \quad \text{cu } h \text{ și } k \text{ fixate.}$$

Deoarece funția f este continuă, pentru $t=0$ și $t=1$, vom avea:

$$\varphi(0)=f(x_0,\ y_0),\ \varphi(1)=f(x_0+ht,\ y_0+kt) \tag{2.5.23}$$

În plus, pe baza ipotezelor făcute asupra derivatelor funcției f derivatele funcției $\varphi(t)$ există și se vor calcula după formula (2.5.19) adică vom avea

$$\varphi^{(l)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(l)} f(x_0+ht,\ y_0+kt) \tag{2.5.24}$$

pentru $l=0, 1, \ldots, m$. Derivatele $\varphi^{(l)}(t)$ vor fi continue în punctul $t=0$, deoarece f admite derivate parțiale pînă la ordinul m continue în $P(x_0,\ y_0)$, prin ipoteză. De asemenea, derivata $\varphi^{(m+1)}(t)$ există în vecinătatea lui $t=0$. Aplicînd formula lui Mac Laurin (cap. 1, § 2, p. 45), funcției $\varphi(t)$, obținem

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi^{(1)}(0)+\frac{t^2}{2!}\varphi^{(2)}(0)+\ldots+\frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(0)+R_m \tag{2.5.25}$$

unde restul R_m poate fi scris sub forma lui Lagrange:

$$R_m=\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta t),\quad 0<\theta<1.$$

Pentru a calcula coeficienții din dezvoltarea de mai sus, punem succesiv în formula (2.5.24), $l=1, 2, \ldots, m$ și calculăm derivatele $\varphi^{(l)}(t)$ în punctul $t=0$. Vom avea:

Scanned with OKEN Scanner

$$\varphi^{(1)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(x_0,\ y_0)=h\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}+$$

$$+k\frac{\partial f(x_0\ y_0}{\partial y}\equiv df(x_0,\ y_0)$$

$$\varphi^{(2)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x_0,\ y_0)=h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\partial y}+$$

(2.5.26)

$$+2hk\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\equiv d^2f(x_0,\ y_0)$$

. . . . . .

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x_0,\ y_0)=\ldots\equiv d^m f(x_0,\ y_0)$$

$$\varphi^{(m+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m+1)} f(x_0+0h,\ y_0+\theta k).$$

Am pus în evidență în aceste formule și diferențialele funcției f, conform formulei (2.5.14), particularizate pentru $n=2$.

Totodată, din (2.5.25), pentru $t=1$, se obține

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi^{(1)}(0)+\frac{1}{2!}\varphi^{(2)}(0)+\ldots+\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)+R^m$$

$$R_m=\frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}_{(\theta)},\quad 0<\theta<1.$$

Înlocuind în această egalitate valorile pentru $\varphi(1)$ și $\varphi(0)$ date de (2.5.23), precum și expresiile derivatelor $\varphi^{(i)}_{(0)}$, conform formulelor (2.5.26), vom avea:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(x_0,\ y_0)+$$

(2.5.27)

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x_0,\ y_0)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x_0,\ y_0)+R_m$$

Scanned with OKEN Scanner

în care restul R_m are forma :

$$R_m=\frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m+1)} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),\quad 0<\theta<1$$

Formula de mai sus poartă numele de *formula lui Taylor* pentru funcția $f(x,\ y)$.

Ținînd seama de formulele (2.5.26) exprimate de această dată cu ajutorul diferențialelor funcției f, formula lui Taylor mai poate fi scrisă și sub forma :

$$\begin{aligned}f(x_0+h,\ y_0+k)&=f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,\ y_0)+\\ &+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,\ y_0)+\ldots,+\frac{1}{m!}d^mf(x_0,\ y_0)+\\ &+\frac{1}{m+1)\ !}d^{m+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),\quad 0<\theta<1\end{aligned}\tag{2.5.28}$$

Observație. Pentru $m=0$, din (2.5.27) se obține o formulă care generalizează formula lui Lagrange din cazul funcțiilor de o variabilă, la funcțiile de două variabile și anume :

$$\begin{aligned}f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)&=hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+\\ &+kf'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),\quad 0<\theta<1\end{aligned}\tag{2.5.29}$$

Fie acum $f(x_1,\ x_2,\ ..,\ x_n)$ o funcție de n variabile și un punct $P_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ aparținînd domeniului de definiție al funcției f. În ipoteza similare cu cele de mai sus, formula lui Taylor devine :

$$\begin{aligned}&f(x_1^0+h_1,\ x_2^0+h_2)\ \ldots,\ x_n^0+h_n)=f(x_1^0,\ x_2^0\ \ldots,\ x_n^0)+\\ &+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)} f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)+\\ &+\frac{1}{(m+1)\ !}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(m+1)} f(x_1+\\ &+\theta h_1,\ \ldots,\ x_n+\theta h_n),\quad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

În scrierea acestei formule s-au utilizat expresia (2.5.14) pentru diferențiala de ordin l a funcției $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Importanța formulei lui Taylor constă în aceea că ea permite calculul valorii funcției date în vecinătatea punctului P_0, cu ajutorul valorii funcției în punctul P_0 și a derivatelor (diferențialelor) de ordinul întîi și superior ale acesteia în P_0.

Exemple.

1. Se dă funcția $f(x, y)=x^3-2y^3+3xy$. Să se găsească valorile funcției f în vecinătatea punctului $P_0(1, 2)$.

Vom aplica formula (2.5.27). Pentru aceasta calculăm derivatele parțiale de ordinul întîi și de ordin superior :

$f'_x(x, y)=3x^2+3y$ $\quad$ $f'_x(1, 2)=3\cdot 1+3\cdot 2=9$

$f'_y(x, y)=-6y^2+3x$ $\quad$ $f'_y(1, 2)=-6\cdot 4+3\cdot 1=-21$

$f''_{xx}(x, y)=6x$ $\quad$ $f''_{xx}(1, 2)=6\cdot 1=6$

$f''_{xy}(x, y)=3$ $\quad$ $f''_{xy}(1, 2)=3$

$f''_{yy}(x, y)=-12y$ $\quad$ $f''_{yy}(1, 2)=-12\cdot 2=-24$

$f'''_{xxx}(x, y)=6$ $\quad$ $f'''_{xxx}(1, 2)=6$

$f'''_{xxy}(x, y)=0$ $\quad$ $f'''_{xxy}(1, 2)=0$

$f'''_{xyy}(x, y)=0$ $\quad$ $f'''_{xyy}(1, 2)=0$

$f'''_{yyy}(x, y)=-12$ $\quad$ $f'''_{yyy}(1, 2)=-12$

Derivatele de ordin superior lui trei sînt toate egale cu zero. Înlocuind în formula (2.5.27) obținem

$$f(1+h, 2+k)=f(1, 2)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\right.$$

$$\left.+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)$$

și în final :

$$f(1+h, 2+h)=f(1, 2)+\frac{1}{1!}(9h-21k)+\frac{1}{2!}(6h^2+6hk-24k^2)+$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{1}{3!}(6h^3-12k^3)=f(1,\ 2)+9h-21h+$$

$$+3h^2+3hk-12k^2+h^2-12k^3.$$

2. Să se calculeze valorile funcției $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+$ $+x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3-4x_1-3x_2+4$ în punctul $P(1{,}01,\ 1{,}02$ $1{,}03)$.

Punctul $P(1,\ 01,\ 1,\ 02,\ 1,\ 03)$ se găsește în vecinătatea lui $P_0(1,\ 1,\ 1)$ cînd variabilele x_1, x_2, x_3 li se dau, respectiv, creșterile $h_1=0{,}1$, $h_2=0{,}2$, $h_3=0{,}3$

Conform formulei lui Taylor, avem

$$f(1+h_1,\ 1+h_2,\ 1+h_3)=f(1,\ 1,\ 1)+\frac{1}{1!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.+h_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(1)}f(1,\ 1,\ 1)+\frac{1}{2!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.+h_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(2)}f(1,\ 1,\ 1)+\ldots$$

În cazul nostru :

$f'_{x_1}=2x_1+2x_2-4$ $\quad$ $f'_{x_1}(1,\ 1,\ 1)=0$

$f'_{x_2}=2x_2+2x_1-3$ $\quad$ $f'_{x_2}(1,\ 1,\ 1)=1$

$f'_{x_3}=2x_3-x_2$ $\quad$ $f'_{x_3}(1,\ 1,\ 1)=1$

$f''_{x_1x_1}=2$ $\quad$ $f''_{x_1x_1}(1,\ 1,\ 1)=2$

$f''_{x_2x_2}=2$ $\quad$ $f''_{x_2x_2}(1,\ 1,\ 1)=2$

$f''_{x_3x_3}=2$ $\quad$ $f''_{x_3x_3}(1,\ 1,\ 1)=2$

$f''_{x_1x_2}=0$ $\quad$ $f''_{x_1x_2}(1,\ 1,\ 1)=0$

$f''_{x_1x_3}=0$ $\quad$ $f''_{x_1x_3}(1,\ 1,\ 1)=0$

$f''_{x_2x_3}=0$ $\quad$ $f''_{x_2x_3}(1,\ 1,\ 1)=0$

Scanned with OKEN Scanner

Toate derivatele de ordinul al treilea sînt egale cu zero. Prin urmare, vom avea :

$$f(1+h_1, 1+h_2, 1+h_3)=f(1, 1, 1)+\frac{1}{1!}(h_2+h_3)+$$

$$+\frac{1}{2!}(2h_1^2+2h_2^2+2h_3^2+4h_1h_2)+=1+(0{,}2,+0{,}3)+(0{,}1)^2+$$

$$+(0{,}2)^2+(0{,}3)^2+2.0.1.0.2=1{,}68.$$

§6. EXTREMELE FUNCȚIILOR DE n VARIABILE

Fie funcția $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită pe mulțimea $D\subset R^n$ și $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ un punct interior mulțimii D.

Definiția 2.6.1. Spunem că punctul P_0 este un *punct de maxim (minim) local* al funcției f, dacă există o vecinătate a acestui punct, $V(P_0)$ astfel încît pentru toate punctele $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ din $V(P_0)\subset D$, are loc inegalitatea :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)\underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x_1^0, x_2^0, ... x_n^0), \tag{2.6.1}$$

Dacă în inegalitatea de mai sus, semnul „$\underset{(\geqslant)}{\leqslant}$“ se înlocuiește cu „$\underset{(>)}{<}$“ se spune că f are *un maxim (minim) strict* în P_0.

Punctele de maxim sau de minim local ale funcției f se numesc puncte de *extrem local* sau *puncte de extrem relativ*.

Punînd $x_1=x_1^0+h_1$, $x_2=x_2^0+h_2$, ..., $x_n=x_n^0+h_n$, definiția de mai sus poate fi reformulată astfel :

Definiția 2.6.2. Punctul $P(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ este un punct de extrem al funcției f dacă există un număr $\mu>0$ astfel încît pentru orice $h_1, h_2, ..., h_n$ care îndeplinesc condițiile :

$$|h_1|<\mu,\ |h_2|<\mu, ..., |h_n|<\mu,\ \mu>0,$$

au loc inegalitățile :

$$f(x_1^0+h_1, h_2^0+h_2, ..., x_n^0+h_n)-f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}0$$

Din aceste definiții, rezultă că punctele de extrem se caracterizează prin aceea că în vecinătatea lor, creșterea totală a

Scanned with OKEN Scanner

funcției păstrează semn constant. Această observație va sta la baza studiului naturii punctelor de extrem ale unei funcții.

2.6.1. *Condiții necesare de extrem.*

Vom reveni la cazul funcțiilor de două variabile.

Teorema 2.6.1. Dacă funcția $z=f(x, y)$ are derivate parțiale de ordinul întîi în punctul $P_0(x_0, y_0)$ și acesta este un punct de extrem relativ al funcției f, atunci:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=0 \tag{2.6.2}$$

Demonstrație. Să presupunem, de exemplu, că P_0 este un punct de maxim relativ. Conform definiției 2.6.2., aceasta înseamnă, că există un număr $\mu>0$, astfel încît:

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\leqslant 0$$

pentru orice h și k cu $|h|<\mu$, $|k|<\mu$.

În particular, punînd $k=0$, din inegalitatea de mai sus urmează:

$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)\leqslant 0 \text{ cu } |h|<\mu,\ h\neq 0$$

Împărțind ambii membrii ai acestei inegalități prin h și trecînd la limită pentru $h\to 0$, vom avea:

În cazul $h>0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\leqslant 0$$

iar dacă $h<0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\geqslant 0$$

Din aceste două inegalități, urmează că în punctul $P_0(x_0, y_0)$ trebuie să avem:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=0$$

Același rezultat se obține dacă am presupune că P_0 este un punct de minim relativ.

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, printr-un raționament similar, putem demonstra că în punctul P_0, trebuie să avem și:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=0$$

Am obținut astfel relațiile (2.6.2) și teorema este dovedită.

În cazul funcțiilor de n variabile, condițiile necesare de extrem vor fi:

$$(2.6.3)\qquad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2}=0,\ \ldots,\quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n}=0.$$

Observații.

1. Un punct în care sînt satisfăcute condițiile (2.6.2) sau (2.6.3) se numește punct *staționar* al funcției f.

2. Avînd în vedere că (2.6.2) și (2.6.3) sînt doar condiții necesare (nu și suficiente de extrem), rezultă că punctele de extrem ale funcției f trebuie căutate printre punctele staționare ale acesteia.

Prin urmare, pentru găsirea punctelor staționare ale funcției f, vom calcula derivatele parțiale de ordinul întîi ale ei, vom egala cu zero aceste derivate și vom rezolva sistemul de ecuații

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

sau, în cazul unei funcții de n variabile, sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\ \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

Exemplu. Fie $f(x, y)=x^3+(y-1)^2$. Să se determine punctele staționare ale funcției f. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2(y-1)$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} 3x^2=0 \\ 2(y-1)=0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestui sistem este $x=0$, $y=1$. Prin urmare, punctul $P(0, 1)$ este punct staționar al funcției f. Totuși, acesta nu este punct de extrem. Într-adevăr, calculînd direct creșterea totală a funcției în P_0, găsim:

$$\Delta f(0, 1)=f(0+h, 1+k)-f(0, 0)=h^3+k^2.$$

Se observă că pentru $h<0$ și $|h|<|k|$, $\Delta f(0, 1)>0$ iar dacă $|h|>|k|$, $\Delta f(0, 1)<0$. Prin urmare, $\Delta f(0, 1)$ își schimbă semnul în vecinătatea punctului P_0, după cum alegem creșterile h și k. Rezultă că P_0 nu este punct de extrem.

2.6.2. *Condiții suficiente de extrem.*

Aceste condiții apelează la derivatele parțiale de ordinul al doilea sau mai mare și se obțin pe baza studiului semnului creșterii funcției în vecinătatea punctului staționar.

a) *Funcții de două variabile.* Fie $f(x, y)$ o funcție care admite derivate parțiale pînă la ordinul trei inclusiv. Notăm

$$(2.6.4) \qquad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

și cu r_0, s_0, t_0, valorile acestor derivate în punctul $P_0(x_0, y_0)$.

Teorema 2.6.2. Dacă funcția $f(x, y)$ este derivabilă parțial pînă la ordinul trei inclusiv, în punctul staționar $P_0(x_0, y_0)$ atunci:

a) în cazul $r_0t_0-s_0^2>0$, punctul P_0 este punct de extrem și anume:

a_1 de maxim, dacă $r_0<0$ (sau $t_0<0$)

a_2 de minim, dacă $r_0>0$ (sau $t_0>0$)

b) în cazul $r_0t_0-s_0^2<0$, punctul P_0 nu este punct de extrem.

c) în cazul $r_0t-{}_0s_0^2=0$, nu se poate afirma nimic despre punctul P_0. În unele cazuri el poate fi punct de extrem, în altele nu.

Demonstrație. Aplicăm formula lui Taylor (2.5.27) funcției $f(x, y)$ în care considerăm $m=3$. Deoarece $P_0(x_0, y_0)$ este punct staționar, conform condițiilor (2.6.2), derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției se vor anula și deci creșterea totală a funcției, $\Delta f(x_0, y_0)$, are expresia:

Scanned with OKEN Scanner

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x_0, y_0)+R_3(P_0; h, k)$$

Folosind notațiile (2.6.4) și dezvoltînd binomul din membrul al doilea, rezultă:

$$\Delta f(x_0, y_0)=\frac{1}{2!}(h^2r_0+2hks_0+k^2t_0)+R_3(P_0; h, k)$$

Dacă h și k sînt mici, adică ne situăm în vecinătatea punctului P_0, semnul creșterii totale a funcției $\Delta f(x_0, y_0)$ va fi determinat de semnul expresiei

$$E(h, k)=h^2r_0+2hkr_0+k^2ts_0 \tag{2.6.5}$$

deoarece în restul de ordinul trei $R_3(P_0; h, k)$ intervin puterile de ordin trei, h^3, h^2k, hk^2 și k^3 care sînt mult mai mici în raport cu puterile de ordinul al doilea h^2, hk și k^2, care apar în $E(h, k)$.

Scoțînd în factor k^2 în expresia (2.6.5) și notînd $h/k=\lambda$ ($k\neq 0$), vom putea scrie

$$\Delta f(x_0, y_0)=\frac{h^2}{2!}E(\lambda)+R_3(P_0; h, k),$$

în care $E(\lambda)$ este trinomul:

$$E(\lambda)=\lambda^2r_0+2\lambda s_0+t \tag{2.6.6}$$

Prin urmare, semnul creșterii funcției în vecinătatea punctului P_0, va fi determinat de semnul trinomului de gradul al doilea $E(\lambda)$, care se discută cu ajutorul discriminantului său $\delta^{(0)}$. În cele ce urmează vom nota cu $\Delta^{(0)}$ discriminantul cu semn schimbat adică:

$$\Delta^{(0)}=-\delta^{(0)}=r_0t_0-s_0$$

Se disting trei cazuri:

a. $\Delta^{(0)}>0$. În caest caz $\delta^{(0)}<0$ și trinomul $E(\lambda)$ păstrează semn constant în vecinătatea punctului P_0. Prin urmare, P_0 va fi punct de extrem. Natura acestuia depinde de semnul coeficientului r_0 și avem:

Scanned with OKEN Scanner

a_1. dacă $r_0<0$, semnul creșterii totale $\Delta f(x_0, y_0)$ este negativ, ceea ce, conform definiției, ne conduce la concluzia că $P_0(x_0, y_0)$ este punct de maxim relativ.

Observație. Dacă în expresia (2.6.5) am fi scos în factor pe h^2 și am fi notat $\frac{k}{h}=\mu \quad (h\neq 0)$ discuția semnului trinomului

$$E(\mu)=r_0+2\mu s_0+\mu^2 t$$

ar fi implicat termenul t_0 și în cazul $t_0<0$ rezultatul de mai sus se păstrează.

a_2. dacă $r_0>0$, creșterea funcției $\Delta f(x_0, y_0)$ este pozitivă și va rezulta că P_0 este punct de minim relativ. Același lucru se întîmplă dacă $t_0>0$.

b. $\Delta^{(0)}<0$. În acest caz $E(\lambda)$ poate lua atît valori pozitive cît și negative în funcție de raportul creșterilor h și k, adică a parametrului λ. Deci creșterea totală a funcției nu va păstra semn constant în vecinătatea punctului P_0 și prin urmare acesta nu poate fi punct de extrem.

c. $\Delta^{(0)}=0$. Nu putem trage nici o concluzie asupra punctului P_0 și va trebui să apelăm la derivatele parțiale de ordin mai mare decît doi folosind formula lui Taylor pentru $n>3$. Teorema este astfel demonstrată.

Observație. Discriminantul $\Delta^{(0)}=r_0t_0-s_0$ poate fi scris și sub forma unui determinant și anume:

$$\Delta^{(0)}=\begin{vmatrix} r_0 & s_0 \\ s_0 & t_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Considerînd pe r_0 ca un determinant de ordin unu, condițiile suficiente de extrem pot fi exprimate sub următoarea formă:

a_1'. dacă $r_0>0$, $\Delta^{(0)}>0$ — punctul P_0 este punct de minim local.

a_2'. dacă $r_0<0$, $\Delta^{(0)}>0$ — punctul P_0 este punct de maxim local. Vom vedea că aceste condiții se generalizează la funcțiile de n variabile.

Scanned with OKEN Scanner

Condiții suficiente de extrem exprimate prin diferențiale. Dacă folosim formula lui Taylor scrisă cu ajutorul diferențialelor (2.5.28), în punctul staționar $P_0(x_0, y_0)$, vom avea :

$$\Delta f(x_0, y_0)=\frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0)+R_3(P_0; h, k) \tag{2.6.7}$$

unde

$$R_3(P_0; h, k)=\frac{1}{3!}d^3f(x_0+h, y_0+k)$$

De aici rezultă o caracterizare a naturii punctelor de extrem cu ajutorul diferențialei de ordinul al doilea. Astfel :

1. dacă în vecinătatea punctului P_0, $d^2f(x_0, y_0)<0$, funcția f are în acest punct un minim local.

2. dacă în vecinătatea punctului P_0, $d^2f(x_0, y_0)>0$, funcția f are în acest punct un maxim local.

3. dacă $d^2f(x_0, y_0)=0$, nu putem decide natura punctului P_0 și în formula (2.5.28) trebuie să luăm în dicuție semnul diferențialei de ordin trei sau mai mare.

Exemplu. Să se studieze extremele funcției $f(x, y)=xy(a-x-y)$, $a\in R$. Avem :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y(a-2x-y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x(a-x-2y)$$

Rezolvînd sistemul :

$$\begin{cases} y(a-2x-y)=0 \\ x(a-x-2y)=0 \end{cases}$$

obținem punctele staționare $P_0(0, 0)$, $P_1(0, a)$, $P_2(a, 0)$ $P_3(a/3, a/3)$. Apoi avem :

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y, \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=a-2x-2y, \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x \tag{2.6.8}$$

Calculînd aceste derivate în punctele staționare, precum și expresia $\Delta^{(0)}$ în fiecare din acestea, găsim :

— în P_0 ; $r_0=0$, $s_0=a$, $t_0=0$, $\Delta^{(0)}=-a^2<0$,

— Punctul P_0 nu este punct de extrem.

— în P_1 ; $r_1=-2a$, $s_1=-a$, $t_1=0$, $\Delta^{(1)}=-a^2<0$.

Scanned with OKEN Scanner

Punctul P_1 nu este punct de extrem.

— în P_2; $r_2=0$, $s_2=-a$, $t_2=-2a$. $\Delta^{(2)}=-a^2<0$

Punctul P_2 nu este punct de extrem.

— în P_3; $r_3=-\frac{2}{3}a$, $s_3=-\frac{a}{3}$, $t_3=-\frac{2}{3}a$, $\Delta^{(3)}=\frac{a^2}{3}>0$.

Punctul P_3 este punct de extrem și anume: de maxim dacă $a>0$ ($r_3<0$) și de minim dacă $a<0$, ($r_3>0$).

Să luăm acum cazul $a=0$. Pentru a decide dacă $P_0(0, 0)$ este sau nu punct de extrem vom calcula creșterea totală a funcției în acest punct introducînd în studiu diferențialele de ordinul al treilea. Astfel vom obține:

$$\Delta f(0, 0)=\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(0, 0)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f(0, 0)+R_4(P_0; h, k)$$

Ținînd seama de (2.6.8), găsim:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=-2,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=-2.$$

Dezvoltînd binoamele și calculîndu-le în P_0, găsim:

$$\Delta f(0, 0)=hk(a-h-k)+R_4(P; h, k).$$

Semnul membrului doi fiind dat de semnul primului termen (de îndată ce h și k sînt suficient de mici) semnul creșterii $\Delta f(0, 0)$ va fi determinat de semnul expresiei:

$$P(h, k)=hk(a-h-k)=-k(h^2+hk)$$

Pentru $k=k_0\neq 0$, expresia din paranteză ca funcție de h își schimbă semnul, în vecinătatea lui P_0, și prin urmare punctul P_0 nu este punct de extrem.

b) *Funcții de n variabile.* Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție de n variabile care admite derivate parțiale pînă la ordinul trei continue în punctul staționar $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Conform celor arătate mai sus, (condițiile (2.6.3)) în acest punct sînt satisfăcute ecuațiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

De aici rezultă că $df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=0$. În acest caz, formula lui Taylor ne dă :

$$f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=$$

$$=\frac{1}{2!}d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)+\frac{1}{3!}d^3f(x_1^0+\theta h_1, x_2^0+\theta h_2, \ldots, x_n^0+$$

$$+\theta h_n), \quad 0<\theta<1.$$

Dar,

$$d^2f(x_1^0, \ldots, x_x^0)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)}f(x_1^0, \ldots, x_n^0)=$$

$$=\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\ldots+h_n^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+2h_{n-1}h_n\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)\begin{matrix}x_1=x_1^0\\ x_2=x_2^0\\ \ldots\ldots\\ x_n=x_n^0\end{matrix}$$

Notăm derivatele parțiale ale funcției f în punctul P_0, cu A_{ij}, adică :

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i \partial y_j}=A_{ji}$$

Obținem :

$$d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}h_ih_j$$

Expresia din membrul al doilea este o formă pătratică (vezi Partea I, cap. 5) în creșterile $h_1, h_2, \ldots, h_n$, considerate ca variabile. Condițiile în care această formă pătratică păstrează semn constant sînt date de Definiția 5.2.2, Partea I

Scanned with OKEN Scanner

și se exprimă cu ajutorul determinanților (minorilor) diagonali ai matricei $A=(A_{ij})^*)$ care se definesc astfel:

$$\Delta_1=A_{11},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\quad \ldots$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot A_{nn} \end{vmatrix}$$

Obținem astfel:

Teorema 2.6.3. Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție de două ori diferențiabilă în punctul staționar $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ și dacă:

1. $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \ldots, \Delta_n>0$, atunci $d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_x^0)>0$ și punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ este punct de minim local al funcției f.

2. $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \ldots, (-1)^n\Delta_n>0$, atunci $d^2f(x_1^0, x_1^9 \ldots, x_0)<0$ și punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_2^0)$ este punct de maxim local al funcției f.

3. Semnele determinaților Δ_j, $j=\overline{1, n}$ sînt diferite dar nu alternează sau cel puțin un determinant se anulează, punctul P_0 nu este punct de extrem.

Exemplu. Fie funcția $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2$. Să găsim punctele de extrem ale acestei funcții. Rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1-x_2=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2-x_1=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=2z=0$$

Soluția acestui sistem este $x_1=0, x_2=0, x_3=0$. Deci, $P_0(0, 0, 0)$ este punct staționar. În acest punct derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției f au valorile:

$$A_{11}=\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_1^2}=2,\quad A_{12}=A_{21}=\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_1 \partial x_2}=-1,$$

$$A_{13}=A_{31}=\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_1 \partial x_3}=0$$

*) Matricea A se numește matrice hassiană.

Scanned with OKEN Scanner

$$A_{22}=\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_2^2}=2, \quad A_{23}=A_{32}=\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_2 \partial x_3}=0,$$

$$A_{33}=\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_3^2}=2$$

Prin urmare, avem

$$\Delta_1=2>0, \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0, \ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6>0$$

Aplicînd teorema precedentă deducem că punctul $P(0, 0, 0)$ este un punct de minim local.

2.6.5. *Extreme condiționate (constrînse sau legate). Multiplicatorii lui Lagrange.*

În unele aplicații se cere determinarea extremelor unei funcții $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cînd variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt supuse unor condiții date, care analitic se exprimă printr-un număr de relații de legătură:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \qquad m<n. \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

O astfel de problemă se numește problemă de *extrem condiționat, constrîns* sau *legat*.

Presupunem că funcția f și funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_m$ sînt definite pe același domeniu D, $D \subset R^n$, și fie $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior domeniului D.

Definiția 2.6.2. Spunem că punctul P_0 care satisface ecuațiile de legătură (2.6.9) este un punct de *maxim* (*minim*) *relativ condiționat* al funcției f, dacă există o vecinătate a acestui punct $v(P_0)$ astfel încît pentru orice $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in v(P_0)$ ale cărui coordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verifică ecuațiile de legătură (2.6.9), este satisfăcută inegalitatea:

Scanned with OKEN Scanner

2.6.10. $$f(P)-f(P_0)\leqslant 0 \quad (\geqslant)$$

Dacă punem $x_j=x_j^0+h_j$, $j=\overline{1,\ n}$, definiția de mai sus se poate reformula sub forma echivalentă astfel:

Definiția 2.6.3. Punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ interior domeniului D este un punct de maxim (minim) local condiționat al funcției f, dacă:

(2.6.11) $$f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, ..., x_n^0+h_n)-f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\leqslant 0 \quad (\geqslant)$$

pentru orice creșteri $h_1, h_2, ..., h_n$ care verifică relațiile:

$$F_i(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, ..., x_n^0+h_n)=0 \qquad i=\overline{1, n}$$

cu $|h_1|, |h_2|, ..., |h_n|<\mu$, $\mu>0$ și suficient de mic.

Punctele de maxim sau minim local condiționat se numesc puncte de *extrem condiționat*.

Începem studiul extremelor condiționate prin a deduce care sînt condițiile necesare de extrem.

Mai întîi să observăm că relațiile (2.6.3) nu mai pot fi utilizate deoarece soluțiile sistemului (2.6.3) nu vor satisface în general relațiile de legătură (2.6.9), din moment ce ele nu au fost folosite. Pe de altă parte, numărul și caracterul (liniar, neliniar, etc.) al acestor relații determină în mod esențial existența și natura punctelor de extrem ale funcției f.

În cele ce urmează, ne vom opri asupra uneia dintre metodele de studiu a extremelor condiționate, cu largă aplicabilitate în matematică și alte domenii, numită *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*.

Vom expune această metodă în cazul extremelor condiționate ale unei funcții de două variabile $f(x, y)$, cînd variabilele x și y sînt supuse unei singure relații de legătură:

(2.6.12) $$F(x, y)=0.$$

De altfel, două condiții de legătură nici nu s-ar putea impune asupra variabilelor x și y, deoarece după cum se poate vedea ușor, problema de extrem își pierde sensul. Într-adevăr, dacă am presupune că în afară de condiția (2.6.12) s-ar mai impune, în plus condiția

(2.6.13) $$G(x, y)=0$$

Scanned with OKEN Scanner

din (2.6.12) și (2.6.13), privindu-le ca un sistem de ecuații, am putea găsi prin rezolvare, niște puncte $P_0(x_0, y_0)$, în care funcția f va avea valori determinate dar care ar putea să nu fie puncte de extrem (local) ale acesteia.

În cele ce urmează ne vom opri pe larg asupra condițiilor necesare de extrem, indicînd, fără demonstrație condițiile suficiente care ne permit să stabilim cînd există puncte de extrem.

Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct de extrem condiționat al funcției $f(x, y)$. Aceasta înseamnă că într-o vecinătate a punctului P_0 creșterea totală a funcției $f(x, y)$,

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$$

păstrează semn constant oricare ar fi h și k suficient de mici și că :

$$F(x_0+h, y_0+k)=0$$

În plus, însăși coordonatele punctului P_0 verifică relația:

(2.6.14) $$F(x_0, y_0)=0$$

Să presupunem că din relația (2.6.12) putem scoate pe y ca funcție de x, adică se poate defini funcția $y=y(x)$, într-o vecinătatea punctului P_0, astfel încît :

(2.6.15) $$F(x, y(x))=0$$

Funcția $y=y(x)$ se numește funcție *definită implicit*.

Teoremă (a funcțiilor implicite). Dacă :

1. $G(x, y)$ este definită într-o vecinătate V a punctului $M_0(x_0, y_0)$ și se anulează în acest punct

$$G(x_0, y_0)=0$$

2. $G(x, y)$ posedă derivate parțiale G'_x, G'_y continue în vecinătatea V,

3. $G'_y(M_0)\neq 0$, atunci există o funcție unică $y=y(x)$, definită și continuă într-o anumită vecinătate X a lui x_0, cu $y_0=y(x_0)$ astfel încît $y=y(x)$ este soluția ecuației $G(x, y)=0$, adică

$$G(x, y(x))=0 \text{ pentru orice } x\in X.$$

Scanned with OKEN Scanner

În plus, funcția $y=y(x)$ este derivabilă în x_0 și derivata sa este dată de formula:

$$y'(x_0)=-\frac{\frac{\partial(x_0,\, y(x_0))}{\partial x}}{\frac{\partial(x_0,\, y(x_0))}{\partial y}}$$

Această teoremă se extinde cu modificările corespunzătoare la funcțiile de n variabile.

Deoarece $P_0(x_0, y_0)$ este punct de extrem (prin ipoteză) a funcției f, derivata funcției $h(x)$ trebuie să se anuleze în x_0 și, conform formulei (2.5.18) de derivare a funcțiilor compuse, trebuie să avem:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}+y'(x_0)\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=0. \tag{2.6.16}$$

Să admitem că $F'_y(x, y)$ există în punctul P_0 și

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\neq 0$$

ceea ce ne asigură (în baza teoremei funcțiilor implicite) că funcția $y=y(x)$ există, cu toate proprietățile ei, într-o anumită vecinătate a punctului P_0.

Înlocuind $y=y(x)$ în funcția $f(x, y)$, aceasta devine funcție numai de variabila x. Fie $h(x)$ această funcție:

$$h(x)=f(x,\, y(x))$$

Pe de altă parte, derivînd identitatea (2.6.15) în raport cu x și calculînd această derivată în P_0, obținem:

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}+y'(x_0)\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}=0 \tag{2.6.17}$$

Eliminînd din (2.6.16) și (2.6.17) pe $y'(x_0)$, vom avea

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial y}}$$

sau

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F(P_0)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial F(P_0)}{\partial x} = 0 \tag{2.6.18}$$

Fie acum determinatul:

$$\frac{D(f, F)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix}$$

numit *determinantul funcțional* sau *jacobianul* funcțiilor f și F (K. Jacobi — matematician german).

Relația (2.6.18) poate fi atunci exprimată sub forma:

$$\frac{D(f, F)}{D(x, y)}\bigg|_{P_0} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F(P_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial F(P_0)}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.6.19}$$

Rezultă astfel:

Teorema 2.6.5. Condițiile necesare ca punctul $P_0(x_0, y_0)$ să fie punct de extrem condiționat pentru funcția $f(x, y)$ cu restricția $F(x, y)=0$, sînt:

$$\frac{D(f, F)}{D(x, y)}\bigg|_{P_0} = 0, \qquad F(x_0, y_0) = 0 \tag{2.6.20}$$

Aceste relații sînt corespunzătoare condițiilor (2.6.3) care caracterizează un punct de extrem nesupus la legături (extrem liber).

În cele ce urmează vom arăta că prin introducerea unei funcții auxiliare, condițiile (2.6.20) pot fi exprimate sub forma (2.6.3).

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, dacă determinantul (2.6.19) este nul, între elementele liniilor sale trebuie să existe o relație de proporționalitate, cu alte cuvinte se va putea găsi o constantă λ_0, astfel încît :

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}+\lambda_0\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}+\lambda_0\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}=0$$

Cu această observație, condițiile necesare de extrem (2.6.20) pot fi reformulate astfel :

Teorema 2.6.6. Punctul $P_0(x_0, y_0)$ este un punct de extrem condiționat al funcției $f(x, y)$ cu restricția $F(x, y)=0$, numai dacă există o constantă λ_0, astfel încît tripletul (x_0, y_0, λ_0) să fie soluție a sistemului :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

(2.6.21)
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$F(x, y)=0$$

Dacă acum considerăm funcția auxiliară (*funcția lui Lagrange*)

(2.6.22)
$$L(x, y ; \lambda)=f(x, y)+\lambda F(x, y)$$

vom observa că ecuațiile sistemului (2.6.21) se obțin prin egalarea cu zero a derivatelor ei parțiale de ordinul întîi :

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0.$$

Prin urmare, condițiile necesare de extrem condiționat pentru funcția f cu restricția $F=0$, sînt de aceeași formă cu (2.6.3) impuse de data aceasta funcției $L(x, y; \lambda)$.

Deducem astfel că punctele de extrem condiționat ale funcției f se vor găsi printre punctele staționare ale funcției L.

Numărul λ poartă numele de multiplicator al lui Lagrange iar metoda de lucru cu acesta se numește *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că prin această metodă problema de extrem condiționat pentru funcția f cu restricția $F=0$, se transformă într-o problemă de extrem liber pentru funcția lui Lagrange (2.6.21).

În consecință, condițiile suficiente de extrem condiționat se vor obține din condițiile corespunzătoare aplicate funcției L.

În continuare, descriem algoritmul de calcul pentru studiul extremelor condiționate în cazul funcțiilor de două variabile.

1. Se construiește mai întîi funcția $L(x, y; \lambda)$ conform formulei (2.6.22), după care se calculează derivatele parțiale ale acesteia în raport cu x, y și λ (considerînd λ ca parametru).

2. Se egalează cu zero aceste derivate, adică se scrie sistemul (2.6.21) și se rezolvă. Prin aceasta se găsesc punctele staționare ale funcției $L(x, y; \lambda)$. Dacă (x_0, y_0, λ_0) este o soluție a sistemului (2.6.21), extrăgînd din această soluție perechea (x_0, y_0), punctul $P_0(x_0, y_0)$ ar putea fi punct de extrem condiționat al funcției f cu restricția $F(x, y)=0$.

3. Înlocuind λ cu λ_0 în expresia funcției $L(x, y; \lambda)$, obținem funcția de două variabile $L(x, y; \lambda_0)$ care în punctul P_0 satisface condiția $L(x_0, y_0; \lambda_0)=f(x_0, y_0)$. Pentru a decide dacă P_0 este punct de extrem condiționat al funcției $f(x, y)$, vom apela la condițiile suficiente de extrem obișnuite (§6, pct. 6.2) pe care le aplicăm de această dată funcției $L(x, y; \lambda_0)$,

4. Vom calcula mai întîi $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0; h, k)$

$$d^2L(x_0, y_0; \lambda_0, h, k)=h^2\frac{\partial^2L(P_0; \lambda_0)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2L(P_0; \lambda_0)}{\partial x\partial y}+$$

$$+k^2\frac{\partial^2L(P_0; \lambda_0)}{\partial y^2}$$

și vom ține seama că în cazul de față creșterile h și k nu pot fi independente deoarece ele trebuie să verifice restricția:

$$F(x_0+h, y_0+k)=0$$

O consecință a acestei relații se obține prin diferențierea legăturii $F(x, y)=0$, în punctul (x_0, y_0). Se obține astfel relația

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}h+\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}k=0$$

Scanned with OKEN Scanner

din care se poate exprima, de exemplu, k în funcție de h: $k=k(h)$.

Înlocuind k cu $k(h)$, diferențiala d^2L devine funcție numai de creșterea arbitrară h și vom avea situațiile:

a. dacă $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0, h, k(h))>0$, punctul $P_0(x_0, y_0)$ este punct de minim relativ condiționat.

b. dacă $d^2L(x_0, y_0; \lambda_0, h, k(h))<0$, punctul $P_0(x_0, y_0)$ este punct de maxim relativ condiționat.

c. dacă $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0; h, k(h))$ are semn variabil în vecinătatea punctului P_0, acesta nu este punct de extrem.

d. dacă $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0, h, k(h))=0$, pentru studiul naturii punctului P_0, vom apela la diferențialele de ordin superior.

Observație. Procedeul de mai sus se aplică întocmai pentru studierea extremelor condiționate ale funcțiilor de trei sau mai multe variabile supuse la o singură relație de legătură.

Exemplu. Să se găsească maximul produsului xyz cu condiția:

$$x+y+z=3.$$

Aplicăm metoda multiplicatorului lui Lagrange. Avem:

$$f(x, y, z)=xyz, \qquad F(x, y, z)\equiv(x+y+z-3)=0$$

Construim funcția $L(x, y, z; \lambda)$:

$$L(x, y, z; \lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-3)$$

Derivăm parțial această funcție în raport cu x, y, z, λ și exprimăm condițiile necesare de extrem, care rezultă prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale de ordinul întîi:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=yz+\lambda \quad \frac{\partial L}{\partial y}=xz+\lambda \quad \frac{\partial L}{\partial z}=yx+\lambda \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z-3$$

Obținem sistemul:

$$yz+\lambda=0, \quad xz+\lambda=0, \quad yx+\lambda=0, \quad x+y+z-3=0$$

Soluția sistemului de mai sus este $x_0=y_0=z_0=1$, $\lambda_0=1$. Punctul $P_0(1, 1, 1)$ este, eventual punct de extrem condiționat, el fiind deocamdată numai punct staționar al funcției $L(x, y, z; \lambda)$. Substituind pe λ cu $\lambda_0=-1$, funcția L devine:

Scanned with OKEN Scanner

$$L(x, y, z, -1)=xyz-(x+y+z-3).$$

Diferențiala de ordinul al doilea d^2L în punctul $P_0(1, 1, 1)$ are expresia:

$$d^2L(1, 1, 1; -1, h, k)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} L(1, 1, 1; -1)=$$

$$=2(hk+hl+kl).$$

Diferențiind ecuația de legătură $F(x, y, z)=0$, obținem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial y}k+\frac{\partial F}{\partial z}l\right)_{(P_0)}=h+k+l=0,$$

deoarece

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=1.$$

Din expresia de mai sus, scoatem creșterea l în funcție de h și k:

$$l=-(h+k)=l(h, k)$$

și o înlocuim în expresia diferențialei de ordinul al doilea a funcției L. Obținem

$$d^2L(1, 1, 1; -1, h, k, l(h, k))=-2(h^2+hk+k^2)$$

Observăm că membrul al doilea al relației de mai sus este negativ pentru orice h și k arbitrari. Prin urmare, punctul $P(1, 1, 1)$ este punct de maxim relativ condiționat deoarece $d^2L(1, 1, 1; -1, h, k, l(h, k))<0$. Valoarea funcției în acest punct este $f(1, 1, 1)=f_{max}=1$.

Considerăm acum cazul general al unei funcții de n variabile $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ supuse la m condiții de legătură:

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_n)=0, \quad F_2(x_1, x_2, ..., x_n)=0, ...,$$

$$F_m(x_1, x_2, ... x_n)=0, \quad m<n$$

Ca și mai sus, vom considera funcția auxiliară L, în care de această dată vom introduce m multiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ în număr egal cu numărul restricțiilor ce se impun. Această funcție va fi:

Scanned with OKEN Scanner

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Punctele staționare ale funcției L vor fi date de soluțiile sistemului de $m+n$ ecuații cu $m+n$ necunoscute $(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad j = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad i = \overline{1, m}$$

Fie $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 ; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ una dintre soluțiile acestui sistem (dacă admite mai multe soluții). Punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ este punct staționar.

Pentru a vedea dacă este punct de extrem condiționat, vom proceda ca mai sus și anume :

— Calculăm diferențiala a doua a funcției L, în care am înlocuit $\lambda_1 = \lambda_1^0$, $\lambda_2 = \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m = \lambda_m^0$ și obținem :

$$d^2L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 ; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0, h_1, \ldots, h_n) =$$

$$= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(2)} L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 ;$$

$$\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$$

— Diferențiem cele m relații de legătură și calculăm diferențialele în punctul P_0. Vom avea :

$$\frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_n} h_n = 0$$

. . . . . .

$$\frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_n} h_n = 0$$

Din aceste relații exprimăm creșterile $h_{m+1}, \ldots, h_n$ în funcție de $h_1, h_2, \ldots, h_m$, astfel :

Scanned with OKEN Scanner

$$h_{m+1}=g_{m+1}(h_1, \ldots, h_m)$$
$$h_{m+2}=g_{m+2}(h_1, \ldots, h_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_n=g_n(h_1, h_2, \ldots, h_m)$$

Înlocuim acum aceste creșteri, în expresia diferențialei $d^2H(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, h_1, h_2, \ldots, h_m)$ și obținem:

$$d^2H(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0, h_1, h_2, \ldots, h_m)=$$
$$=\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{m} a_{rs}h_r h_s=\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$$

în care

$$a_{rs}=a_{sr}=\frac{\partial^2 L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)}{\partial x_r \partial x_s}$$

Funcția $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ este o formă pătratică în creșterile independente $h_1, h_2, \ldots, h_m$,. Aplicînd aceeași teoremă (Partea I, §5) care dă condițiile de definire a semnului unei forme pătratice, va rezulta:

a. dacă $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ este pozitiv definită, punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ este punct de minim relativ condiționat.

b. dacă $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ este negativ definită, punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ este punct de minim relativ condiționat.

c. dacă $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ este nedefinită, punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ nu este punct de extrem condiționat.

d. dacă $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ este semidefinită (își schimbă semnul în funcție de valorile creșterilor $h_1, h_2, \ldots, h_m$) nu ne putem pronunța asupra punctului P_0 fiind necesară o cercetare suplimentară care face apel la diferențialele de ordin superior.

Exemplu. Să se cerceteze extremele funcției $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ cu legăturile:

(2.6.23)
$$F_1(x_1, x_2, x_3)\equiv x_1+x_2+x_3-3=0$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3)\equiv x_1-x_2-8=0$$

În acest caz, funcția lui Lagrange are forma:

Scanned with OKEN Scanner

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 3) + \\ + \lambda_2(x_1 - x_2 - 8)$$

și avem :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 3, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_2 - 8$$

Sistemul obținut prin egalarea cu zero a derivatelor de mai sus are soluția : $x_1^0 = 5$, $x_2^0 = 3$, $x_3^0 = 1$, $\lambda_1^0 = -2$, $\lambda_2^0 = -8$ și, deci, punctul $P_0(5, 3, 1)$ este eventual punct de extrem condiționat.

Pentru $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -8$, funcția lui Lagrange devine

$$L(x_1, x_2, x_3; -2, -8) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3 - 3) - \\ - 8(x_1 - x_2 - 8) = x_1^2 + x_3^2 + x_3^2 - 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 70$$

Deoarece derivatele parțiale de ordinul al doilea ale acestei funcții sînt :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

diferențiala a doua în punctul P va avea expresia :

$$d^2H(5, 3, 1; -1, -8, h_1, h_2, h_3) = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$

Creșterile h_1, h_2, h_3 nefiind independente, prin diferențierea relațiilor de legătură (2.6.23) vom obține :

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0,$$

$$h_1 - h_2 = 0,$$

relații care ne conduc la condițiile : $h_2 = h_1$, $h_3 = -2h_1$. Cu acestea, vom avea :

$$d^2L(5, 3, 1, -2, -8, h_1, h_1, -2h_1) = 6h_1^2 > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece pentru orice valoare $h_1 \neq 0$ diferențiala de ordinul al doilea al funcției L este pozitivă (strict), conchidem că $P_0(5, 3, 1)$ este punct de minim condiționat al funcției f. Valoarea funcției în acest punct este:

$$f_{\min} = f(P_0) = 35$$

Observație. În matematica economică, problemele de extrem condiționat se formulează adesea ca probleme de optimizare. Un exemplu în acest sens îl constituie următoarea aplicație:

Aplicație. Un rotor de turbină trebuie transportat din localitatea A (punctul A) în localitatea B (punctul B), fig. 2.6.1, mijloacele de transport urmînd să traverseze n zone

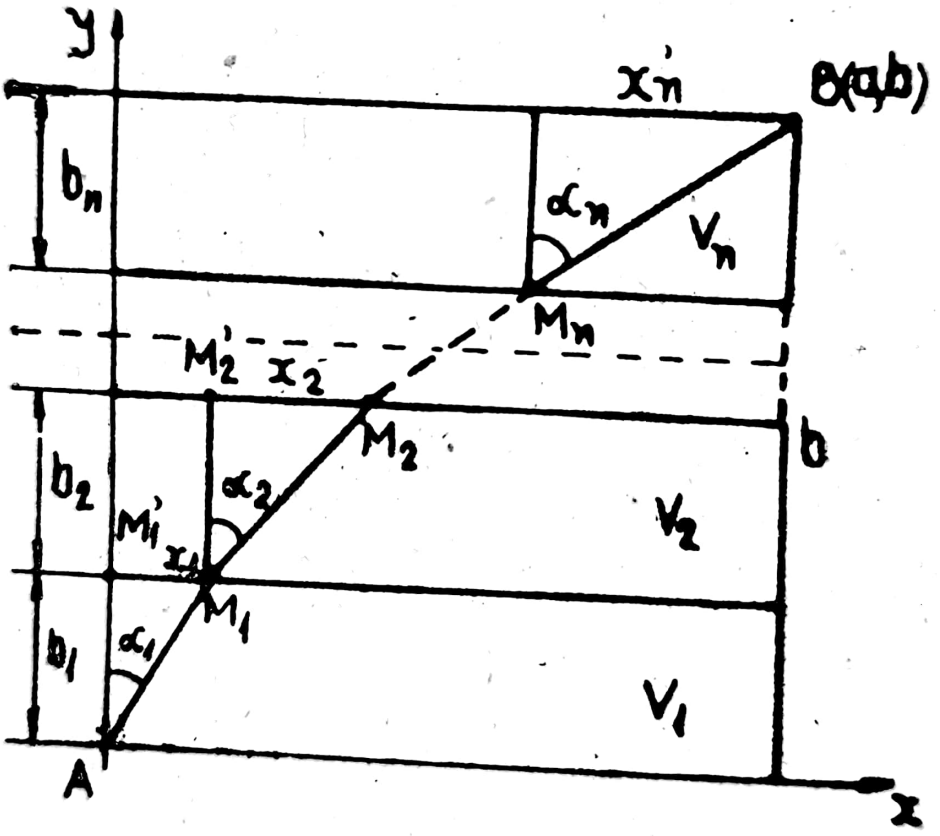


Fig. 2.6.1.

care nu pot fi străbătute, din motive de teren și natura transportului, decît cu anumite viteze: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Se cere să se determine traseul pe care urmează a se face deplasarea, astfel încît timpul necesar de parcurs între cele două puncte să fie minim. Modelul matematic al acestei probleme de optimizare este următorul: considerăm punctul A în originea unui sistem de axe Ax, Ay punctul $B(a, b)$ aflîndu-se în

Scanned with OKEN Scanner

planul xAy. Notăm cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ lățimile celor n zone. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distanțele $M_1'M_1$, $M_2'M_2, \ldots, M_n'M_n$ socotite pe paralele la axa Ax. Observăm imediat că trebuie să avem :

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a \tag{2.6.24}$$

Timpul în care este parcursă prima zonă este dată de raportul $\frac{AM_1}{v_1}$, timpul în care este parcursă cea de a doua zonă, de raportul $\frac{M_1M_2}{v_2}$, ș.a.m.d. Dacă se notează cu t timpul în care este parcurs traseul AB, atunci vom avea

$$t=\frac{AM_1}{v_1}+\frac{M_1M_2}{v_2}+\ldots\frac{M_nB}{v_n}$$

Dar, după cum se poate vedea din fig. 2.6.1, au loc relațiile:

$$AM_1=\sqrt{x_1^2+b_1^2},\quad M_1M_2=\sqrt{x_2^2+b_2^2},\ \ldots,\ M_nB=\sqrt{x_n^2+b_n^2}$$

și deci :

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{v_1}\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\frac{1}{v_2}\sqrt{x_2^2+b_2^2}+\ldots+\frac{1}{v_n}\sqrt{x_n^2+b_n^2}$$

Ajungem astfel la următoarea problemă de optimizare :

$$\min t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

cu condiția (2.6.24) :

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a$$

și

$$x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1, n}$$

Tratînd-o ca o problemă de extrem condiționat, vom defini funcția lui Lagrange :

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n\ ;\lambda)=c_1\sqrt{x_1^2+b_1^2}+c_2\sqrt{x_2^2+b_2^2}+\ldots+$$

$$+c_n\sqrt{x_n^2+b_n^2}+\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n-a)$$

în care am notat $c_j=\frac{1}{v_j}$, $j=\overline{1, n}$. Impunînd condițiile de extrem pentru L obținem sistemul :

$$\frac{x_1c_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}}-\lambda=0,\ \ldots,\ \frac{x_nc_n}{\sqrt{x_n^2+b_n^2}}-\lambda=0, \tag{2.6.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_1+x_2+\ldots,+x_n-a_1=0.$$

Se poate verifica ușor că soluția sistemului de mai sus care verifică condițiile $x_j \geqslant 0$, $j=\overline{1, n}$ este dată de:

$$(2.6.26) \quad x_1^0=\frac{b_1 v_1 \lambda_0}{\sqrt{1-v_1^2\lambda_0^2}}, \; x_2^0=\frac{b_2 v_2 \lambda_0}{\sqrt{1-v_2^2\lambda_0^2}}, \ldots, \; x_n^0=\frac{b_n v_n \lambda_0}{\sqrt{1-v_n^2\lambda_0^2}}$$

în care λ_0 este rădăcina ecuației:

$$(2.6.27) \quad \frac{b_1 v_1}{\sqrt{1-v_1^2\lambda^2}}+\frac{b_2 v_2}{\sqrt{1-v_2^2\lambda^2}}+\ldots.+\frac{b_n v_n}{\sqrt{1-v_n^2\lambda^2}}=\frac{a}{\lambda}$$

Deoarece toate cantitățile care intervin în relația de mai sus sînt pozitive, rezultă următoarele condiții pentru λ:

$$\lambda>0, \; 1-v_j\lambda^2>0, \; j=\overline{1, n}$$

De aici, deducem că λ trebuie ales astfel încît:

$$0<\lambda<\min\left\{\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \ldots, \frac{1}{v_n}\right\}$$

Rezolvînd ecuația (2.6.27) prin metodele obișnuite, se obține o aproximare λ_0 a lui λ și apoi cu aceasta din (2.6.26) vom găsi valorile x_i^0, care vor da abscisele punctelor de traversare a celor n zone. Apoi, pentru a găsi direcțiile de deplasare în fiecare zonă, vom observa că (în baza relațiilor (2.6.26)) pentru fiecare zonă putem scrie:

$$\sin \alpha_1=v_1\lambda_0, \; \sin \alpha_2=v_2\lambda_0, \ldots, \sin \alpha_n=v_n\lambda_0$$

Din relațiile de mai sus, se obțin

$$\alpha_j=\operatorname{arc}\sin(v_j\lambda_0), \; j=\overline{1, n}$$

adică unghiurile sub care trebuie traversate cele n zone.

Deci traseul care corespunde timpului optim de deplasare din punctul A în punctul B, va fi determinat de perechile (x_j^0, α_j), $j=\overline{1, n}$, și va fi constituit dintr-o linie poligonală cu extremitățile în cele două puncte. Un exemplu efectiv de rezolvare a acestei probleme se poate găsi în [4].

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3. *ELEMENTE SPECIALE DE CALCUL INTEGRAL*

§1. INTEGRALE IMPROPRII (GENERALIZATE)

Să amintim că noțiunea de integrală definită pentru o funcție de o variabilă $f:[a, b]\to R$ are la bază următoarele două ipoteze esențiale:

a) intervalul de integrare $[a, b]$ este finit,

b) funcția $f(x)$ este mărginită pe $[a, b]$, adică există o constantă $M>0$ astfel încît $|f(x)|<M$ pentru orice $x\in[a, b]$.

În cele ce urmează, vom extinde noțiunea de integrală în cazurile în care una dintre condițiile a) sau b) nu este îndeplinită.

Cu alte cuvinte, vom vedea ce sens putem atribui simbolurilor

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{3.1.1}$$

sau simbolului:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{3.1.2}$$

cînd în vecinătatea punctului $c\in[a, b]$, funcția $f(x)$ este nemărginită: $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=+\infty$

În acest caz, punctul c se va numi *punct singular* al funcției f.

Expresiile de forma (3.1.1) sau (3.1.2) în cazul în care li se poate atribui un sens se numesc integrale improprii sau *integrale generalizate*.

1.1. *Integrale cu limite infinite.*

Să presupunem că funcția $f(x)$ este definită pe intervalul nemărginit (semidreapta) $[a, +\infty)$ și considerăm simbolul

Scanned with OKEN Scanner

(3.1.3) $$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

Pentru a vedea ce trebuie să înțelegem prin acest simbol, vom admite că funcția f este integrabilă în sens obișnuit (propriu), pe orice interval finit de forma $[a, A]$ cu $A > a$. În această ipoteză există integrala:

$$I(A) = \int_a^A f(x)dx$$

care, la rîndul ei este funcție de A.

Definiția 3.1.1. Limita (finită sau infinită) a integralei $I(A)$, cînd A tinde la $+\infty$ se numește *integrala funcției* $f(x)$ *de la* a *la* $+\infty$ și se notează:

(3.1.4) $$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx$$

În cazul în care această limită este finită, se spune că integrala (3.1.3) este *convergentă*, iar funcția $f(x)$ se numește *integrabilă* pe intervalul infinit $[a, +\infty)$. Dacă, limita (3.1.4) nu există sau este infinită, se spune despre integrala (3.1.3) că este *divergentă* sau că nu are sens.

În manieră similară, se definesc integralele funcțiilor $f: (-\infty, a] \to R$ sau $f: (-\infty, +\infty) \to R$. Astfel, integrala funcției $f(x)$ dela $-\infty$ la a va fi dată de

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{B \to -\infty} \int_B^a f(x)dx$$

iar integrala funcției $f(x)$ dela $-\infty$ la $+\infty$, va însemna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \to \infty \\ B \to -\infty}} \int_B^A f(x)dx$$

în ambele cazuri, păstrîndu-se terminologia adoptată relativ la integrala (3.1.3) în privința convergenței sau divergenței. În ceea ce privește integrala din membrul, drept dacă $a \in (B, A)$ putem scrie

$$\int_B^A f(x)dx = \int_B^a f(x)dx + \int_a^A f(x)dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă există limita primei integrale pentru $B \to -\infty$ și a celei de a doua pentru $A \to +\infty$, atunci va exista și limita primei integrale și vom scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Evident, această proprietate nu depinde de modul de alegere al punctului a.

Să considerăm acum cîteva exemple:

Exemplul 1. Fie funcția $f: [0, +\infty) \to R$:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Deoarece funcția $f(x)$ este integrabilă pe orice interval finit $[0, A]$ cu $A > 0$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$ fiind o primitivă a ei, vom avea:

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = F(A) - F(0) = \operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} A,$$

întrucît $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Cînd $A \to +\infty$ avem: $\lim\limits_{A \to +\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$ și deci, în baza definiției (3.1.1), integrala funcției $f(x)$ este convergentă și are valoarea:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

În concluzie, funcția f este integrabilă pe $[0, +\infty)$.

Exemplul 2. Considerăm funcția

$$f(x) = \frac{1}{x^\lambda}, \quad \lambda > 0$$

definită pe interaalul $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ cu valori în R. Să studiem convergența integralei:

Scanned with OKEN Scanner

(3.1.5) $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

Deoarece funcția $f(x)$ este integrabilă pe orice interval $[a, A]$ $a>0$, $A>a$, vom avea :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda}(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda})$$

1. Dacă $\lambda>1$, $\lim\limits_{A\to\infty} A^{1-\lambda}=0$ și obținem :

$$\lim_{A\to\infty} \int_A^a \frac{dx}{x^\lambda} = -\frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda} \text{ (număr finit)}$$

Deci :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1} a^{1-\lambda}$$

și deducem că integrala (3.1.4) este convergentă.

2. Dacă $0<\lambda<1$, $\lim\limits_{A\to\infty} A^{1-\lambda}=+\infty$ și integrala (3.1.5) este divergentă.

3. Pentru $\lambda=1$, integrala (3.1.5) devine :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

Avem

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^A = \ln A - \ln a$$

Deoarece pentru $A\to\infty$

$$\lim_{A\to\infty} \int \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

va rezulta că în acest caz integrala este divergentă.

În concluzie, integrala (3.1.5) este convergentă. dacă $\lambda>1$ și divergentă pentru $0<\lambda\leqslant 1$.

Să remarcăm că la fel se comportă și seria armonică generalizată $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ (vezi Cap. 1, p. 22) care este convergentă pentru $\alpha>1$ și divergentă atunci cînd $0<\alpha\leqslant 1$.

De fapt, definiția de integrală convergentă sau divergentă nu este cu totul întîmplătoare. Într-o tratare mai amplă a integralei improprii (vezi, de exemplu, lucrarea [16]), se arată că unei astfel de integrale i se poate asocia o serie numerică care este convergentă cînd integrala este convergentă și divergentă atunci cînd integrala este divergentă.

Exemplul 3. În cele ce urmează vom întîlni integrala

$$\int_a^\infty e^{-x}dx, \quad a\geqslant 0$$

Deoarece o primitivă a funcției e^{-x} pe intervalul $[a, A]$ este e^{-x}, vom avea:

$$\int_a^A e^{-x}dx=-e^{-A}+e^{-a}$$

și deci

$$\int_a^\infty e^{-x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_a^A e^{-x}dx=e^{-a}$$

În particular, pentru $a=0$, se obține

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=1 \tag{3.1.6}$$

Formula lui Leibniz-Newton.

Fie $f(x)$ o funcție definită și integrabilă pe intervalul $[a, +\infty)$. După cum am văzut, aceasta înseamnă că pentru orice $A>a$, A finit, integrala $\int_a^A f(x)dx$ există.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, A]$ putem scrie:

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x) \Big|_a^A \tag{3.1.7}$$

De aici rezultă că integrala din membrul întîi va avea limită finită pentru $A \to \infty$, dacă și numai dacă $F(A)$ are limită finită. Prin urmare, dacă notăm

$$F(+\infty) = \lim_{A \to \infty} F(A)$$

și trecem la limită pentru $A \to \infty$ în formula (3.1.7), vom obține

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{\infty}$$

Aceasta poate fi numită *formula lui Leibniz-Newton* pentru *integrale improprii* cu limite infinite.

1.2. *Teoreme și criterii de convergență pentru integrale improprii cu limite infinite.*

În cele ce urmează vom enunța o teoremă și vom stabili un criteriu de convergență pentru integralele improprii în ipoteza că funcția de sub integrală este *nenegativă*.

Teorema 3.1.1. Fie $f, g : [a, +\infty)$, două funcții nenegative și:

$$I_1 = \int_a^{\infty} f(x)dx, \qquad I_2 = \int_a^{\infty} g(x)dx$$

Dacă pentru orice $x \geqslant a$, are loc inegalitatea:

$$f(x) \leqslant g(x) \tag{3.1.8}$$

atunci:

1. din convergența integralei I_2 rezultă convergența integralei I_1;

2. din divergența integralei I_1 rezultă divergența integralei I_2.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Într-adevăr, în baza inegalității (3.1.8) și a proprietăților integralelor definite, pentru orice $A > a$ (A finit) are loc relația :

$$0 \leqslant \int_a^A f(x)dx \leqslant \int_a^A g(x)dx. \tag{3.1.9}$$

1. Dacă admitem că integrala I_2 este convergentă, atunci există :

$$\int_a^\infty g(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A g(x)dx$$

și, trecînd la limită pentru $A \to \infty$ în (3.1.9) obținem :

$$0 \leqslant \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx \leqslant \int_a^\infty g(x)dx$$

Din această dublă inegalitate deducem că I_1 este convergentă.

2. În cazul în care I_1 este divergentă, funcția f fiind nenegativă, va rezulta

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx = +\infty$$

Trecînd din nou la limită pentru $A \to \infty$ în dubla inegalitate (3.1.9) și ținînd seama de relația de mai sus, vom obține:

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A g(x)dx = +\infty$$

iceea ce ne arată că integrala I_2 este divergentă.

Teorema este astfel demonstrată.

Observăm că această teoremă stabilește convergența sau divergența unei integrale prin compararea ei cu o altă integrală.

Luînd ca funcție de comparație pe $f(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$ a cărei integrabilitate pe intervalul $[a, +\infty)$, $a > 0$, a fost studiată în exemplul 2, p. 153, obținem un criteriu de convergență (sau divergență) foarte util în aplicații.

Criteriul de convergență (divergență) al lui Cauchy.

Dacă pentru x suficient de mare, funcția $f(x)$ poate fi pusă sub forma :

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}},\quad \lambda>0$$

atunci:

1. dacă $\lambda>1$ și $\varphi(x)\leqslant C<+\infty$, integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.

2. dacă $\lambda\leqslant 1$ și $\varphi(x)\geqslant C>0$, integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este divergentă.

Demonstrația acestei criteriu se bazează pe teorema 3.1.1. în care se aleg, pe rînd, $g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$ și, respectiv $f(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$

Exemple. Să se studieze natura (convergența sau divergența) integralelor:

$$I_1=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},\qquad I_2=\int_1^{\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$$

Considerăm prima integrală. Scoțînd în factor forțat pe x la numitor, funcția de sub integrală se poate scrie astfel:

$$f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

unde

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

Deoarece funcția $\varphi(x)$ pentru $x\to\infty$ este mărginită și anume:

$$0<\varphi(x)\leqslant 1$$

iar $\lambda=2$, aplicînd prima parte a criteriului de mai sus va rezulta că I_1 este convergentă.

În cazul celei de a doua integrale, vom observa că putem scrie:

$$f(x)=\frac{x^{3/2}}{1+x^2}=\frac{1}{x^{1/2}}\,\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{\varphi(x)}{x^{1/2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Dar pentru $x>1$, $\varphi(x)\geq\dfrac{1}{2}>0$ și cum exponentului lui x de la numitr este $\lambda=\dfrac{1}{2}<1$, conform celei de a doua părți a criteriului de mai sus, vom deduce că integrala I_2 este divergentă.

Criteriul general de convergență.

În cazul cînd nu cunoaștem o primitivă $F(x)$ a funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, +\infty)$, pentru studiul convergenței integralei $\int_a^{\infty} f(x)dx$ se poate utiliza următorul criteriu general de convergență pe care îl menționăm mai jos, fără demonstrație.

Criteriul general de convergență. Condiția necesară și suficientă ca $\int_a^{\infty} f(x)dx$ să fie convergentă este ca pentru orice $\varepsilon>0$, să existe un număr $A_0>a$, astfel încît de îndată ce $A'>A_0$ și $A''>A_0$, să fie satisfăcută inegalitatea:

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

Definiția 3.1.2. Spunem că funcția $f(x):[a, +\infty)\to R$ este *absolut integrabilă* pe $[a, +\infty)$ sau că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este *absolut convergentă* dacă:

(3.1.10) $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ este convergentă.

În legătură cu noțiunea de convergență absolută a integralei funcției $f(x)$ se demonstrează următoarea teoremă.

Teorema 3,1.2. Dacă integrala (3.1.10) este convergentă, atunci este convergentă și integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ (convergența absolută a unei integrale improprii implică convergența ei).

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația acestei teoreme se sprijină pe criteriul general de convergență enunțat mai sus și pe inegalitatea modulului de la integralele obișnuite :

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| \leqslant \int_a^A |f(x)|\,dx$$

Reciproca teoremei de mai sus nu este întotdeauna adevărată. Putem întîlni exemple în care $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă dar integrala $\int_a^\infty |f(x)|dx$ este divergentă. O astfel de integrală se numește *semiconvergentă.*

Observație. Toate teoremele și criteriile de mai sus se aplică și integralelor de tipul :

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \text{ și } \int_{-\infty}^\infty f(x)dx.$$

Exemple.

1. Să se calculeze integralele :

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{ax}dx, \quad a>0, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx .$$

În ambele cazuri vom aplica formula lui Leibniz-Newton pentru integrale improprii. Avem astfel :

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a}(1-0) = \frac{1}{a}, \qquad I_1 = \frac{1}{a}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \operatorname{arctg} e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2}$$

2. Să se studieze convergența absolută a integralelor

Scanned with OKEN Scanner

$$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\, dx\,; \qquad J_2 = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Integrala $J_1 = \int_1^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}$ dste absolut convergentă, deoarece putem scrie

$$\left| \frac{\cos ax}{k^2+x^2} \right| \leqslant \frac{1}{k^2+x^2} < \frac{1}{x^2}$$

și prin urmare

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos ax}{k^2+x^2} \right| dx \leqslant \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Cum integrala din membrul al doilea este convergentă, rezultă că J_1 este absolut convergentă.

În particular, dacă luăm $a=1$ și $k=0$, obținem integrala

$$J = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

care este, de asemenea, absolut convergentă.

Să considerăm acum cea de a doua integrală :

$$J_2 = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Primitiva funcției $\frac{\sin x}{x}$ nu se exprimă prin funcții elementare și, deci, nu putem găsi explicit $\int_1^{A} \frac{\sin x}{x} dx$ pentru ca apoi să trecem la limită pentru $A \to \infty$. Dacă efectuăm însă, o integrare prin părți, obținem :

$$\int_1^{A} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^{A} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă:

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - J$$

Cum integrala J este convergentă, va rezulta că limita primului membru este finită și, deci J_2 este convergentă. Dacă considerăm acum integrala:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx.$$

ținînd seama că

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{2}$$

vom avea:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$$

Se poate demonstra că cea de a doua integrală din membrul drept este convergentă, dar prima este cu siguranță divergentă Așadar, funcția $\frac{\sin x}{x}$ nu este absolut integrabilă pe intervalul și, deci integrala I_2 este *semiconvergentă*.

1.3. *Integrale proprii din funcții nemărginite.*

Să presupunem că funcția $f(x)$ este nemărginită într-un punct sau într-un număr finit de puncte ale intervalului $[a, b]$ (are o singularitate sau un număr finit de singularități în $[a, b]$).

Pentru a fixa ideile, să presupunem că acesta se întîmplă în extremitatea b a intervalului, adică funcția f este definită pe intervalul $[a, b)$ Ne propunem să stabilim ce sens i se poate atribui simbolului:

(3.1.11) $$\int_a^b f(x)dx \quad \text{în care} \quad \lim_{x\to b}|f(x)| = +\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $f(x)$ este integrabilă pe orice interval de forma $[a, b-\eta]$ în care η este un număr pozitiv. În acest caz, integrala :

$$I(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

există.

Definiția 3.1.3. Ducă pentru $\eta\to 0$, integrala $I(\eta)$ are limită (finită sau infinită), ea se va numi integrala funcției $f(x)$ de la a la b și se notează :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx. \tag{3.1.12}$$

În cazul în care această limită este finită se spune că integrala (3.1.11) este *convergentă* sau că are sens, iar funcția $f(x)$ se numește *integrabilă* pe intervalul $[a, b)$. Dacă limita (3.1.12) nu există sau este infinită. vom spune despre integrala (3.1.11) că este *divergență* sau că *nu are sens.*

Analog vom defini integralele funcțiilor

$$f:(a, b]\to R \quad \text{și} \quad f:[a, b]\setminus\{c\}\to R.$$

Astfel, dacă $f(x)$ este definită pe $(a, b]$, adică are pe $x=a$, punct singular, vom înțelege prin integrale improprie a funcției f expresia :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta'\to 0}\int_{a+\eta'}^b f(x)dx$$

Dacă $f(x)$ este definită și mărginită pe $[a, b]\setminus\{c\}$, $x=c$, fiind deci punct singular pentru funcția f, vom descompune integrala funcției f de la a la b, sub forma

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c-\eta} f(x)dx+\int_{c+\eta'}^b f(x)dx$$

și apoi, dacă există limitele celor două integrale din membrul al doilea pentru $\eta\to 0$ și $\eta'\to 0$, vom spune că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

Dacă cel puțin una dintre integralele din membrul al doilea nu există sau sînt infinite (inclusiv cazul în care ne-ar

Scanned with OKEN Scanner

conduce la nedeterminarea $\infty-\infty$) vom spune despre integrala funcției f că este divergentă sau că nu are sens.

Să considerăm cîteva exemple.

Exemplul 1. Fie funcția $f:[0,\ 1)\to R$,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Funcția $f(x)$ este nemărginită în vecinătatea punctului $x=1$, dar este mărginită și integrabilă pe orice interval de forma $[0,\ 1-\eta\ ]$ cu $\eta>0$. Deci, vom avea:

$$\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{1-\eta}=\arcsin(1-\eta)-\arcsin 0$$

Cum, $\lim\limits_{\eta\to 0}\arcsin(1-\eta)=\frac{\pi}{2}$ și $\arcsin 0=0$, deducem că integrala este convergentă și are valoarea

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$$

Totodată, vom spune că $f(x)$ este integrabilă pe intervalul $[0,\ 1)$.

Exemplu 2. Să studiem integrala

$$I=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda},\ b>a,\ \lambda>0$$

Funcția $\frac{1}{(x-a)^\lambda}$ are o singularitate în punctul $x=a$, dar este mărginită și integrabilă pentru orice $x\in[a+\eta',\ b]$, cu $0<\eta'<b-a$.

Mai întîi pentru $\lambda=1$, avem

$$\int_{a+\eta'}^b\frac{dx}{x-a}=\ln(x-a)\Big|_{a+\eta'}^b=\ln(b-a)-\ln\eta'$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece atunci cînd $\eta' \to 0$, $\lim\limits_{\eta' \to 0} [\ln(b-a) - \ln \eta'] = +\infty$,

$$\lim_{\eta' \to 0} \int_{a+\eta'}^{b} \frac{dx}{x-a} = \lim_{\eta' \to 0} [\ln(b-a_0 - \ln \eta'] = +\infty,$$

rezultă că pentru $\lambda = 1$, integrala I este divergentă.

Pentru $\lambda \neq 1$, avem

$$\int_{a+\eta'}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}} = \frac{1}{-\lambda+1} (x-a)^{-\lambda+1} \Big|_{a+\eta'}^{b} = \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(\eta')^{\lambda-1}} \right]$$

Cînd $\eta' \to 0$, cel de al doilea termen din paranteză are limita infinită, dacă $\lambda - 1 > 0$, adică $\lambda > 1$. În acest caz, integrala este divergentă.

Dacă $\lambda - 1 < 0$, adică $\lambda < 1$, expresia din membrul al. doilea are limita finită pentru $\eta' \to 0$ și, prin urmare, în acest caz, integrala I este convergentă. Valoarea ei este :

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}, \quad \lambda < 1$$

În concluzie, integrala I este convergentă numai dacă $\lambda < 1$

Formula lui Leibniz-Newton.

Să presupunem că $f(x)$ este integrabilă pe intervalul $[a, b)$ în sensul definit mai sus. Dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, pe intervalul $[a, b-\eta]$, conform formulei fundamentale a calculului integral vom avea :

$$\int_{a}^{b-\eta} f(x)dx = F(b-\eta) - F(a) = F(x) \Big|_{a}^{b-\eta}$$

Atunci cînd integrala $\int_{a}^{b} f(x)dx$ este convergentă, $\lim\limits_{\eta \to 0} F(b-\eta)$ există și este finită. Reciproc, dacă această limită există, integrala este convergentă. Putem scrie așadar,:

(3.1.13) $$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_{a}^{b}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiția ca aici, prin $F(b)$ să înțelegem : $F(b)=\lim_{\eta\to 0} F(b-\eta)$.

Formula (3.1.13), va fi numită formula lui Leibniz-Newton pentru integralele improprii ale funcțiilor nemărginite.

1.4. *Teoreme și criterii de convergență pentru integralele funcțiilor nemărginite.*

În cele ce urmează, vom considera numai cazul funcțiilor $f:[a, b)\to R$, deoarece teoremele și criteriile de convergență pentru integralele improprii ale funcțiilor cu alte singularități se demonstrează pe căi analoage.

Menționăm în special faptul că pentru integralele improprii de care ne ocupăm se poate demonstra o teoremă de comparație similară teoremei (3.1.1) și un criteriu de convergență asemănător. Ne vom opri asupra acestuia din urmă.

Criteriul de convergență (divergență) al lui Cauchy.

Dacă pentru valori ale lui x suficient de apropiate de b, funcția $f(x)$ poate fi pusă sub forma :

$$f(x)=\frac{\psi(x)}{(b-x)^{\lambda}}, \quad \lambda>0$$

atunci ;

1. dacă $0<\lambda<1$ și $\varphi(x)\leqslant c<+\infty$, integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă,

2. dacă $\lambda\geqslant 1$ și $\psi(x)>c>0$, integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Exemple. Să se studieze natura integralelor :

$$I_1=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}; \qquad I_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x dx$$

Funcția de sub prima integrală este definită pe intervalul $[0,1)$ cu singularitate în $x=1$.

Observînd că :

$$\sqrt[4]{1-x^4}=\sqrt[4]{1-x}\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}$$

Scanned with OKEN Scanner

vom avea:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}$$

Notînd cu $\psi(x)$ cel de al doilea factor din membrul al doilea, putem scrie pe $f(x)$ sub forma:

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(1-x)^{1/4}}$$

Cum pentru $x \to 1$, $\psi(x)$ este mărginită $\left(\lim_{x\to 1} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)$ și $\lambda = 1/4 < 1$, conform primei părți a criteriului de mai sus, va rezulta că integrala I_1 este convergentă.

În ceea ce privește cea de a doua integrală, vom observa mai întîi că funcția $\operatorname{tg}^2 x$ devine nemărginită în $x = \frac{\pi}{2}$. Pentru $x \neq \frac{\pi}{2}$, putem scrie:

$$tg^2 x = tg^2 x \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Notînd:

$$\psi(x) = \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \sin^2 x$$

vom avea:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\psi(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Dar, în vecinătatea punctului $x = \frac{\pi}{2}$, funcția $\psi(x)$ este mărginită inferior, de un număr strict pozitiv, iar puterea

Scanned with OKEN Scanner

binomului de la numitor este $\lambda=2>1$. Aplicînd cea de a doua parte a criteriului, ajungem la concluzia că I_2 este divergentă.

Criteriul general de convergență.

Ca și în cazul funcțiilor definite pe un interval nemărginit pentru funcțiile care au singularități pe un interval finit se poate da un criteriu de existență a integralelor acestor funcții care să nu apeleze la o primitivă a funcției respective.

Teorema 3.1.3. Condiția necesară și suficientă ca $\int_a^b f(x)dx$ să fie convergentă este ca pentru orice $\varepsilon>0$ să putem determina un număr $\eta>0$, astfel încît pentru orice x', $x''\in(b-\eta, b]$, să avem:

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

În mod analog se vor formula teoremele ce definesc convergența integralelor funcțiilor definite pe intervale de forma $(a, b]$ sau $[a, b]\setminus\{c\}$.

Definiția 3.1.4. Spunem că integrala $\int_a^b f(x)dx$ este *absolut convergentă* dacă este convergentă integrala:

$$\int_a^b |f(x)|dx, \quad (\lim_{x\to b}|f(x)|=+\infty).$$

Se mai spune în acest caz că funcția $f(x)$ este *absolut integrabilă* pe $[a, b)$.

Ca și în cazul integralelor cu limite infinite se poate arăta că absoluta convergență a unei integrale dintr-o funcție nemărginită atrage convergența sa.

Exemplu. Considerăm integrala

$$I=\int_0^1 \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \alpha>0$$

Funcția de sub integrală este nemărginită în punctul $x=0$. Vom studia convergența absolută a integralei I. Avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| dx = \int_0^1 \frac{|\cos x|}{x^\alpha}\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

Integrala din membrul al doilea fiind convergentă pentru $\alpha < 1$, deducem că integrala I va fi absolut convergentă și deci convergentă.

1.5. *Transformarea și calculul integralelor improprii.*

Integrarea prin părți. Să presupunem că funcțiile $u(x)$ și $v(x)$ sînt definite și continue împreună cu primele lor derivate în intervalul $[a, b)$ în care punctul $x=b$ ar putea fi și $+\infty$. În aceste condiții are loc egalitatea:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \tag{3.1.14}$$

unde prin $uv|_a^b$ înțelegem diferența:

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x\to b}[u(x)v(x) - u(a)v(a)].$$

Dacă doi dintre cei trei termeni ai formulei (3.1.14) au sens, atunci are sens și cel de al treilea. În cazul cînd $b=+\infty$ din (3.1.14) se obține:

$$\int_a^\infty u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^\infty v\,du \tag{3.1.15}$$

Exemple. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx, \quad I_2 = \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

În prima integrală, funcția de sub semnul integralei devine nemărginită în punctul $x=0$ ($\lim_{x\to 0} \ln \sin x = -\infty$). Aplicăm formula de integrare prin părți și obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am redus astfel calculul integralei improprii I_1 la calculul integralei:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$$

Punctul $x=0$ este doar un punct singulr aparent al funcției de sub integrală, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}=1$. Integrala J se calculează în continuare printr-o nouă integrare prin părți de data aceasta ca o integrală proprie. Va rezulta că integrala I_1 are valoare finită, prin aceasta dovedindu-se și convergența.

Prin aceeași metodă obținem:

$$I_2=\int_0^{\infty} xe^{-x}dx=-xe^{-x}\,|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\int_0^{\infty} e^{-x}dx=1.$$

Schimbarea de variabilă. Fie $f(x)$ o funcție definită și continuă pe intervalul finit sau infinit $[a, b)$ și integrabilă în sens propriu pe orice subinterval care nu conține punctul $x=b$, care ar putea să fie $+\infty$. Considerăm funcția monoton crescătoare $x=\varphi(t)$ continuă împreună cu derivata sa $\varphi'(t)$ în intervalul $[\alpha, \beta)$ unde β ar putea fi și $+\infty$. Presupunem că $\varphi(\alpha)=a$ și $\varphi(\beta)=b$, această din urmă egalitate fiind înțeleasă în sensul că $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$. În aceste condiții are loc formula:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Existența uneia dintre aceste integrale implică existența celeilalte.

Exemple. Să se calculeze:

$$I_1=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3},\qquad I_2=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

Integrala I_1 este, evident, convergentă deoarece funcția de sub integrală poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\varphi(x) \leqslant 1$.

Observînd că putem scrie $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, vom face substituția $x+1=t$. Rezultă $x=t-1$, $dx=dt$: pentru $x=0$. rezultă $t=1$, pentru $x=+\infty$, rezultă $t=+\infty$ și astfel vom avea:

$$I_1=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arc\,tg}(\infty)-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

În ceea ce privește cea de a doua integrală, vom observa mai întîi că putem scrie:

$$I_2=\int_a^c\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}+\int_c^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

unde c este un punct interior intervalului $[a, b]$. Cum ultimele două integrale sînt convergente, (vezi Exemplul 2, p. 164), va rezulta că I_2 este convergentă.

Efectuînd substituția $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, vom avea $dx=(b-a)\sin 2t\,dt$, pentru $x=a$, avem $t=0$, pentru $x=b$, rezultă $t=\frac{\pi}{2}$ și integrala se tranformă în:

$$I_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\pi.$$

Observație. În cazul în care funcția f este definită pe intervalul $(a. +\infty)$ și $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$, integrala:

$$\int_a^{\infty}f(x)dx$$

este improprie în ambele sensuri discutate mai sus. Scriind-o însă sub forma

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{\infty}f(x)dx,\ b\in(a,\ +\infty)$$

reducem calculul ei la două integrale de tip cunoscut.

Scanned with OKEN Scanner

§2. INTEGRALE DEPINZÎND DE UN PARAMETRU

Să considerăm funcția $y=f(x, \lambda)$, în care λ este un parametru. Presupunem că funcția f este definită pe mulțimea

$$D=\{(x, \lambda)\ \ a\leqslant x\leqslant b,\ \ \alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta\}$$

Dacă $f(x, \lambda)$ este integrabilă în raport cu x, pentru orice $\lambda\in[\alpha, \beta]$, funcția $I(\lambda)$ definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$ prin relația

$$I(\lambda)=\int_a^b f(x, \lambda)dx. \tag{3.2.1}$$

poartă numele de *integrală care depinde de parametrul* λ. O formă mai generală a integralei de mai sus este aceea în care însăși limitele de integrare a și b depind de parametrul λ, adică:

$$I(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda)dx \tag{3.2.2}$$

Dintre problemele care se pun în legătură cu integralele depinzînd de un parametru, ne vom opri numai la următoarele trei:

a) în ce condiții pentru $f(x, \lambda)$, funcția $I(\lambda)$ este continuă,

b) cum se calculează derivata funcției $I(\lambda)$,

c) cum se efectuează integrala funcției $I(\lambda)$ într-un interval dat $[\gamma, \delta]\subset[\alpha, \beta]$.

2.1. *Continuitatea în raport cu parametrul* λ.

Teorema 3.2.1. Dacă $f(x, \lambda)$ privită ca funcție de două variabile este continuă în domeniul D, integrala (3.2.1) este continuă pentru orice $\lambda\in[\alpha, \beta]$. Aceeași proprietate o are integrala (3.2.2) dacă $a(\lambda)$ și $b(\lambda)$ sînt continue în raport cu $\lambda\in[\alpha, \beta]$

Demonstrație. Vom demonstra teorema de mai sus în primul caz. Fie $\Delta\lambda$ o creștere arbitrară a parametrului λ. Atunci:

$$\Delta I=I(\lambda+\Delta\lambda)-I(\lambda)=\int_a^b [f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)]dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece am presupus că $f(x, \lambda)$ este continuă pe D, rezultă că oricare ar fi $\varepsilon>0$, se poate determina $\mu>0$, astfel încît pentru $|\Delta\lambda|<\mu$ are loc inegalitatea:

$$|f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)|<\varepsilon$$

Vom avea deci:

$$|\Delta I| \leqslant \int_a^b |f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)]dx \leqslant \int_a^b \varepsilon\, dx$$

sau,

$$|\Delta I| \leqslant \varepsilon(b-a)$$

Dar această inegalitate ne arată că

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} [I(\lambda+\Delta\lambda)-I(\lambda))]=0$$

sau

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} I(\lambda+\Delta\lambda)=I(\lambda)$$

ceea ce înseamnă că funcția $I(\lambda)$ este continuă în raport cu λ.

2.2. *Derivarea în raport cu parametrul* λ.

Teorema 3.2.2. Dacă funcția $f(x, \lambda)$ ca funcție de două variabile este continuă în D și dacă $f'_\lambda(x, \lambda)$ este la rîndul ei continuă ca funcție de x și λ pe domeniul D, atunci pentru orice $\lambda\in[\alpha, \beta]$ are loc formula:

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\, dx \tag{3.2.3}$$

Teorema 3.2.3. Dacă, funcțiile $a(\lambda)$ și $b(\lambda)$ sînt derivabile în raport cu λ, atunci $I(\lambda)$ definită prin formula (3.2.2) este derivabilă în intervalul $\lambda\in[\alpha, \beta]$ și are loc formula:

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\, dx + b'(\lambda)f[b(\lambda), \lambda] - a'(\lambda)f[a(\lambda), \lambda]) \tag{3.2.4}$$

Din nou vom demonstra această teoremă doar în primul caz.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm mai întîi că, pe baza ipotezelor, putem scrie formula lui Lagrange, în raport cu parametrul λ:

$$(3.2.4)' \quad f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)=\frac{\partial f(x, \lambda+\theta\nabla\lambda)}{\partial\lambda}\Delta\lambda,\ 0<\theta<1$$

Apoi avem:

$$I'(\lambda)=\lim_{\Delta(\lambda)\to 0}\frac{I(\lambda+\Delta\lambda)-I(\lambda)}{\Delta\lambda}=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta I(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

Dar

$$\frac{\Delta I(\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_a^b\frac{f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)}{\Delta\lambda}\,dx.$$

Folosind proprietatea (3.2.4)′ putem scrie

$$\frac{\Delta I(\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_a^b\frac{\partial f(x, \lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial\lambda}\,dx$$

Adunînd și scăzînd sub integrală termenul $\frac{\partial f(x,\ \lambda)}{\partial\lambda}$ vom obține:

$$\frac{\Delta I(\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_a^b\left[\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial f(x,\lambda+\Delta\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\right]dx=$$

$$=\int_a^b\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\,dx+\int_a^b\left[\frac{\partial f(x, \lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\right]dx$$

Trecînd la limita pentru $\Delta\lambda\to 0$, în ambii membrii ai acestei egalități și ținînd seama că funcția $f(x, \lambda)$ este continuă în raport cu λ, [$f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)\to 0$, pentru $\Delta\lambda\to 0$], vom avea:

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{I(\lambda+\Delta\lambda)-I(\lambda)}{\Delta\lambda}=I'(\lambda)=\int_a^b\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\,dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat ne arată că în condițiile menționate pentru funcția $f(x, \lambda)$, derivata $I(\lambda)$ se poate calcula prin derivare sub semnul de integrare.

Demonstrația teoremei în cazul al doilea se poate găsi în [9]

Formulele de derivare în raport cu parametrul λ date de (3.2.3) și (3.2.4) permit ca dintr-o integrală cunoscută să se deducă alte integrale.

Exemplu. Fie integrala

$$I(\lambda)=\int_a^b \sin(\lambda x)dx$$

Avem

$$I(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}[\cos \lambda b-\cos \lambda a]$$

Derivînd ambii membrii în raport cu λ, obținem:

$$I'(\lambda)=\int_a^b x\cos(\lambda x)dx=-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\cos \lambda b-\cos \lambda a)}{\lambda}\right)=$$

$$=\frac{b\sin(\lambda b)-a\sin(\lambda b)}{\lambda}+\frac{\cos \lambda b-\cos \lambda a}{\lambda^2}$$

În manieră similară putem scrie:

$$\int_a^b x^2 \sin(\lambda x)dx=\frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\frac{\cos \lambda b-\cos \lambda a}{\lambda}\right), \text{ etc.}$$

2.3. *Integrarea în raport cu parametrul (integrale iterate).*

Fie $[\gamma, \delta]$ un subinterval al intervalului $[\alpha, \beta]$, eventual chiar însuși intervalul $[\alpha, \beta]$

Teorema 3.2.4. Dacă funcția $f(x, \lambda)$ satisface condițiile din teorema 3.2.1, atunci:

$$(3.2.5)\qquad J=\int_\gamma^\delta I(\lambda)d\lambda=\int_\gamma^\delta\left(\int_a^b f(x, \lambda)dx\right)d\lambda=\int_a^b\left(\int_\gamma^\delta f(x, \lambda)d\lambda\right)dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Într-adevăr, în ipotezele teoremei (3.2.1) va rezulta că $I(\lambda)$ este continuă pentru $\lambda \in [\alpha, \beta]$ și deci integrabilă în raport cu λ.

Considerăm integrala :

$$F(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, \lambda) d\lambda$$

și notăm :

$$J_1 = \int_a^b F(x) dx$$

Formula din enunțul teoremei va fi demonstrată dacă arătăm că $J = J_1$.

Pentru aceasta, fie $\lambda \in [\gamma, \delta]$, un punct arbitrar și funcțiile :

$$J(\lambda) = \int_{\gamma}^{\lambda} I(\theta) d\theta = \int_{\gamma}^{\lambda} \left[\int_a^b f(x, \theta) dx \right] d\theta$$

$$J_1(\lambda) = \int_a^b \left[\int_{\gamma}^{\lambda} f(x, \theta) d\theta \right] dx$$

Avem

$$\frac{dJ}{d\lambda} = I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

iar, în baza teoremei de derivare, sub semnul integralei :

$$\frac{dJ_1}{d\lambda} = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{\gamma}^{\lambda} f(x, \upsilon) d\theta \right) dx = \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

Comparînd formulele de mai sus, avem :

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{dJ_1}{d\lambda}$$

De aici urmează :

$$J(\lambda) = J_1(\lambda) + C \quad (C = \text{const.})$$

Dar, pentru $\lambda = \gamma$, avem $J(\gamma) = J_1(\gamma)$ și, deci, $C = 0$. Prin urmare pentru orice $\lambda \in [\gamma, \delta]$ vom obține $J(\lambda) = J_1(\lambda)$. Punînd acum $\lambda = \gamma$, deducem egalitatea din enunțul teoremei.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Să notăm parametrul λ cu y. Atunci $f(x, \lambda)$ devine o funcție de variabilele (x, y). Dacă funcția $f(x, y)$ se poate scrie ca un produs de două funcții de o variabilă:

$$f(x, y)=F(x)G(y)$$

formula (3.2.5), devine:

$$\int_a^b [\int_c^d F(x)\, G(y)dy)]dx=\int_a^b [F(x) \int_c^d G(y)dy]dx = \int_a^b F(x)dx \int_c^d G(y)dy$$

În acest caz, integrala iterată se transformă într-un produs de integrale.

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\, dx \qquad (0<a\leqslant b)$$

Punem expresia de sub integrală sub forma:

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\, dy$$

și considerăm integrala:

$$I=\int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy$$

Aplicînd Teorema (3.2.4) și schimbînd ordinea de integrare obținem:

$$I=\int_a^b dy \int_0^1 x^y\, dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} =\ln \frac{b+1}{a+1}.$$

2.4. *Integrale improprii depinzînd de un parametru.*

Convergența uniformă. Să presupunem că funcția $f(x, \lambda)$ este definită pentru orice $x\in[a, +\infty)$ și $\lambda\in I_1$ unde I_1 este un interval dat mărginit sau nemărginit. Dacă $f(x, \lambda)$ este integrabilă în raport cu x pentru orice $\lambda\in I_1$, adică există integrala:

(3.2.6)
$$I(\lambda)=\int_a^\infty f(x, \lambda)dx$$

Scanned with OKEN Scanner

spunem că $I(\lambda)$ este o integrală improprie depinzînd de parametrul λ.

Conform definiției integralei improprii pe un interval infinit, cînd există limita:

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x, \lambda)dx,$$

rezultatul va fi o funcție de parametrul λ, adică :

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x, \lambda)dx = I(\lambda)$$

Dacă această limită este aceeași oricare ar fi $\lambda \in I_1$, vom spune că integrala :

$$I(\lambda) = \int_a^\infty f(x, \lambda)dx$$

este *uniform convergentă* pe I_1.

În cele ce urmează, vom menționa doar unele rezultate din teoria integralelor improprii depinzînd de parametri.

Teorema 3.2.5. Dacă funcția $f(x, \lambda)$ este definită și continuă ca funcție de variabilele (x, λ) în care $x \geqslant a$, $\lambda \in I_1$ și dacă integrala (3.2.6) este uniform convergentă în raport cu $\lambda \in I_1$, atunci :

1) $I(\lambda)$ este continuă pentru orice $\lambda \in I_1$,

2) dacă derivata parțială $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ este continuă în raport cu (x, λ) în domeniul $[0, \infty) \times I_1$, iar integrala :

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx,$$

este uniform convergentă în raport cu $\lambda \in I_1$, atunci :

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \tag{3.2.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Dacă $[\alpha, \beta] \subset I_1$, și integralele sînt uniform convergente, atunci:

$$(3.2.8) \qquad \int_\alpha^\beta I(\lambda)d\lambda = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty f(x, \lambda)dx\right)d\lambda = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x, \lambda)d\lambda\right)dx$$

Observație. În anumite condiții formula (3.2.8) se poate generaliza pentru $\beta \to \infty$ în care caz se obține

$$(3.2.8) \qquad \int_\alpha^\infty \left[\int_a^\infty f(x, \lambda)dx\right]d\lambda = \int_a^\infty \left[\int_\alpha^\infty f(x, \lambda)d\lambda\right]dx$$

Exemplu. Să se calculeze integrala (Gauss):

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Această integrală se întîlnește frecvent în teoria probabilităților și statistica matematică.

Efectuăm mai întîi substituția $x = ut$ unde u este un parametru pozitiv. Obținem:

$$I = u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt$$

Înmulțim apoi ambii membrii ai egalității de mai sus cu $e^{-u^2}du$ și integrăm în raport cu u între limitele 0 și $+\infty$. Vom avea:

$$I \cdot \int_0^\infty e^{-u^2}du = \int_0^\infty e^{-u^2}\left(\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt\right)udu$$

Schimbînd ordinea de integrare în membrul al doilea găsim:

$$I^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udu\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Deoarece soluția $I < 0$ este imposibilă, întrucît $e^{-x^2} > 0$, rezultă:

$$(3.2.9) \qquad I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

§3. INTEGRALE IMPROPRII CU APLICAȚII ÎN MATEMATICA ECONOMICĂ (INTEGRALELE LUI EULER)

În teoria probabilităților și în statistica matematică apar frecvent următoarele integrale improprii conținînd parametri:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \quad \text{(funcția Gamma)}, \tag{3.3.1}$$

$$B(p,q)=\int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad \text{(funcția Beta)}, \tag{3.3.2}$$

și:

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx, \tag{3.3.3}$$

care poartă numele de *integrala Euler-Poisson*.

3.1. *Funcția Gamma.* Funcția $\Gamma(p)$ este definită pentru orice $p\in(0, +\infty)$. Pentru a arăta aceasta, descompunem pe $\Gamma(p)$ în două integrale, astfel:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^{1}\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}+\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

Dacă $p>1$, funcția de sub semnul primei integrale este mărginită și integrabilă pe $[0, 1]$ și deci această integrală are valoare finită. Cea de a doua integrală este o integrală de tip 1.1, p. 151 care este convergentă (chiar uniform), deoarece oricînd putem determina un număr $\alpha>1$, astfel încît:

$$x^{\alpha}(x^{p-1}e^{-x})\leqslant M \quad \text{sau} \quad \frac{x^{p-1}}{e^x}\leqslant\frac{M}{x^{\alpha}}, \qquad \alpha>1$$

Cînd $0<p<1$, prima integrală este o integrală improprie de tip 1.3, p. 162 deoarece funcția $e^{-x}x^{p-1}$ devine infinită în punctul $x=0$ (limita inferioară a integralei). Conform criteriului de convergență pentru astfel de integrale, integrala va fi convergentă dacă $1-p<1$, adică $p>0$. Cum cea de a doua integrală există, va rezulta că funcția $\Gamma(p)$ este definită pentru orice $p>0$.

Proprietăți ale funcției $\Gamma(p)$:

1. Pentru orice $p>0$, are loc formula de recurență:

Scanned with OKEN Scanner

(3.3.4) $$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

Demonstrație. În expresia funcției $\Gamma(p)$ aplicăm formula de integrare prin părți punînd :

$$u=x^{p-1},\ e^{-x}dx=dv$$

Rezultă

$$du=(p-1)x^{p-2},\ v=-e^{-x}$$

Deci :

$$\Gamma(p)=-x^{p-1}e^{-x}\Big|_0^{\infty}+(p-1)\int_0^{\infty}x^{p-2}e^{-x}dx$$

Primul termen din membrul al doilea este egal cu zero deoarece :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p-1}}{e^x}=0 \text{ și } \lim_{x\to 0}x^{p-1}e^{-x}=0,$$

iar cel de al doilea se scrie :

$$(p-1)\int_0^{\infty}x^{p-2}e^{-x}dx=(p-1)\Gamma(p-1)$$

Trecînd apoi pe p în $p+1$, obținem

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

adică, tocmai formula (3.3.4).

2. Dacă $p=n$, unde n este număr natural, atunci :

(3.3.5) $$\Gamma(n+1)=n\,!$$

Demonstrație. Din formula de recurență (3.3.4), aplicată pentru $n+1, n, \ldots, 3.2$, rezultă :

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n),\quad \Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1),\ \ldots,\ \Gamma(2)=1,$$

în care, conform Exemplului 3, pag. 155, $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1$.

Înmulțind membru cu membru aceste egalități, obținem după simplificări

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\ldots 2.1=n\,!$$

adică proprietatea din enunț. Din acest motiv, se mai spune că funcția $\Gamma(p)$ în care $p>0$, generalizează noțiunea de factorial definită numai pentru numere naturale pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

3. *Variația funcției* $\Gamma(p)$. Funcția $\Gamma(p)$ este continuă în intervalul $(0, \infty)$ și, în plus, se poate arăta că derivata sa în raport cu p, $\Gamma'(p)$ se anulează în punctul $p_0=1{,}461632\ldots$, punct în care derivata secundă $\Gamma''(p)$ este pozitivă. Prin urmare în punctul $p=p_0$, funcția $\Gamma(p)$ are un minim local care se dovedește a fi și absolut, deoarece $\lim\limits_{p\to 0}\Gamma(p)=+\infty$, $\lim\limits_{p\to\infty}\Gamma(p)=+\infty$.

Valoarea funcției $\Gamma(p)$ în punctul p_0 este

$$\min \Gamma(p)=\Gamma(p_0)=0{,}8856602\ldots$$

Graficul funcției $\Gamma(p)$ este redat în fig. 3.3.1.

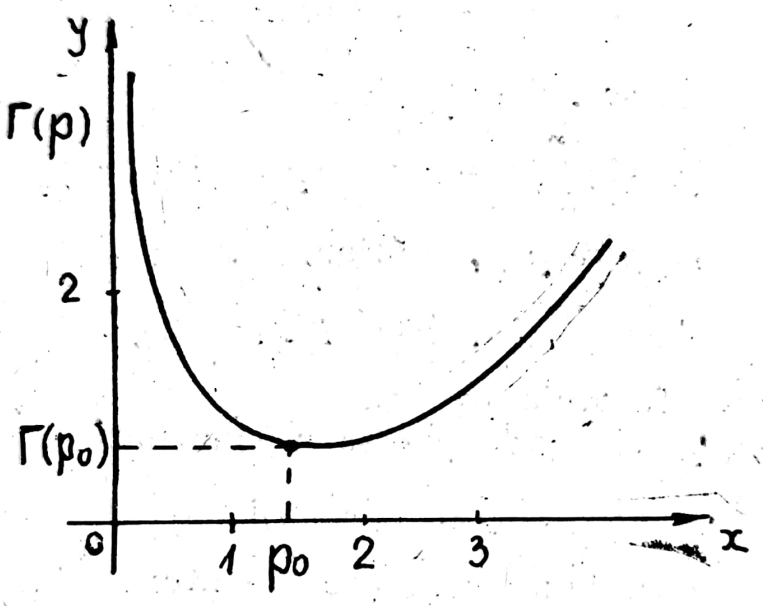


Fig. 3.3.1

Cu ajutorul funcției $\Gamma(p)$ se pot calcula integralele improprii de forma

$$I_m=\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx,\quad (a>0,\ m>-1)$$

care se întîlnesc în teoria probabilităților.

Într-adevăr, efectuînd substituția $ax^2=t$, sau $x=\sqrt{\frac{t}{a}}$ rezultă $dx=\frac{dt}{2\sqrt{at}}$ $(x=0,\ t=0;\ x=\infty,\ t=\infty)$ și deci

Scanned with OKEN Scanner

$$I_m = \frac{1}{2}\frac{2}{a^{\frac{m+1}{2}}}\int_0^{\infty} t^{\frac{m+1}{2}} e^{-t}dt = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

În particular, pentru $p=\frac{1}{2}$, se găsește :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

formulă ce exprimă legătura dintre funcția $\Gamma(p)$ și integrala Euler-Poisson (pe care o vom studia mai jos).

În încheiere, dăm cîteva valori numerice cu trei zecimale exacte pentru $\Gamma(p)$, [3].

0	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$
0	∞	0,30	2,991
0,05	19,470	0,35	2,546
0,10	9,513	0,40	2,218
0,15	6,220	0,45	1,968
0,20	4,590	0,50	1,772
0,25	3,625		

3.2. *Funcția* $B(p, q)$. Această funcție este exprimată printr-o integrală improprie de tip 1.3, p. 162 depinzînd de doi parametrii ; p și q. Vom demonstra că $B(p,q)$ este definită numai pentru $p, q>0$. Mai întîi să observăm că dacă $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$, funcția $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ este continuă pe intervalul $[0, 1]$ și integrala ce definește această funcție există în sens propriu. Pentru $p<1$ sau $q<1$, funcția de sub integrală (integrandul) devine infinită în punctul $x=0$, respectiv în punctul $x=1$ și integrala (3.3.2) devine o integrală improprie de tip 1.3. Pentru a studia convergența ei o vom descompune astfel :

$$B(p, q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm pe rînd cele două integrale. În prima integrală, funcția $(1-x)^{q-1}$ este mărginită pe $[0, 1/2]$, dar funcția de sub integrală devine nemărginită în punctul $x=0$ dacă $p-1<0$. Or, aplicînd criteriul de convergență (cap. 3, pct. 1.4), vom deduce că integrala va avea sens dacă $1-p>1$, adică $p>0$. În cea de a doua integrală, factorul x^{p-1} este mărginit pe $[1/2, 1]$, în schimb funcția $(1-x)^{q-1}$ devine nemărginită în punctul $x=1$, dacă $q-1<0$. Conform aceluiaș criteriu, ea va fi convergentă dacă $1-p<1$, ceea ce revine la $q>0$.

În concluzie, ambele integrale vor fi convergente dacă $p>0$ și $q>0$. Prin urmare, acestea sînt și valorile parametrilor p și q pentru ca $B(p, q)$ să existe.

Proprietăți ale funcției $B(p, q)$.

1. Funcția $B(p, q)$ este simetrică în perechea (p, q) adică:

$$B(p, q)=B(q, p) \tag{3.3.6}$$

Demonstrație. Efectuăm în integrala care dă pe $B(p, q)$ substituția $x=1-u$ ($dx=-du$, $x=0$, $u=1$; $x=1$, $u=0$) și vom avea:

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}dx=$$

$$=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p}\ du=B(p, q).$$

2. Pentru orice $p>0$, $q>0$ are loc formula de recurență:

$$B(p+1, q+1)=\frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}B(p, q). \tag{3.3.7}$$

Demonstrație. Plecăm de la expresia funcției $B(p+1, q+1)$:

$$B(p+1, q+1)=\int_0^1 x^{p}(1-x)^{q}dx,$$

și efectuăm o integrare prin părți, considerînd:

$$u=(1-x)^{q},\ (du=-q(1-x)^{q-1}\ dx)\ \ dv=x^{p}dx,\ \left(v=\frac{1}{p+1}\ x^{p+1}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama că $\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q$ se anulează în $x=0$ și $x=1$, vom obține:

$$B(p+1,\ q+1)=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]_0^1+\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx=$$

$$\frac{q}{p+1}\int_0^1[x^p-x^p(1-x)](1-x)^{q-1}dx.$$

(În cea de a doua integrală, ne-am folosit de identitatea $x^{p+1}=x^p-(1-x)x^p$).

În continuare, vom avea:

$$B(p+1,\ q+1)=\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx-\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=$$

$$=\frac{q}{p+1}B(p+1,\ q)-\frac{q}{p+1}B(p+1,\ q+1).$$

Trecînd în membrul întîi cel de al doilea termen din membrul drept, obținem, după unele calcule:

$$(3.3.7)\qquad B(p+1,\ q+1)=\frac{p}{p+q+1}B(p+1,\ q)$$

Pe o cale similară se poate arăta că:

$$(3.3.8)\qquad B(p+1,\ q+1)=\frac{p}{p+q+1}B(p,\ q+1).$$

Trecînd pe q în $q-1$, în această ultimă formulă (3.3.8), vom găsi:

$$B(p+1,\ q)=\frac{1}{p+q}B(p,\ q)$$

Introducînd acum această expresie în (3.3.7), obținem tocmai formula din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

Între funcția $B(p, q)$ și funcția $\Gamma(p)$ se poate stabili o anumită relație. Aceasta este dată de următoarea proprietate a funcției $B(p, q)$:

3. Pentru orice $p>0$, $q>0$, are loc formula :

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{3.3.9}$$

Demonstrație. În expresia funcției $\Gamma(p)$ efectuăm substituția $x=\alpha u$, $(\alpha>0)$. $(dx=\alpha du,\ x=0,\ u=0;\ x=\infty,\ u=\infty)$ și vom obține :

$$\Gamma(p)=\alpha^p \int_0^\infty u^{p-1}e^{-\alpha u}du$$

Punînd în această formulă $p+q$ în locul lui p și $\alpha+1$ în locul lui α, putem scrie :

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(\alpha+1)^{p+q}}=\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-u}e^{-\alpha u}du$$

Înmulțim ambii membrii ai acestei egalități cu α^{p-1} și integrăm rezultatul între limitele $[0, +\infty)$. Obținem :

$$\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+q}}\,d\alpha= \tag{3.3.10}$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-u}e^{-\alpha u}du\right)\frac{\alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+1}}\,d\alpha.$$

Se observă că dacă punem $x=\frac{\alpha}{1+\alpha}$ $\left(dx=\frac{1}{(1+\alpha)^2}d\alpha,\ x=\right.$ $\left.=0,\ \alpha=0;\ x=1,\ \alpha=+\infty\right)$ în expresia funcției $B(p, q)$, obținem această funcție exprimată printr-o integrală improprie de specia întîia și anume :

$$B(p, q)=\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+q}}\,d\alpha \tag{3.3.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de această formulă şi inversînd ordinea de integrare în formula (3.3.10), vom obţine

$$\Gamma(p+q)B(p, q)=\int_0^\infty u^{p+q-1}\, e^{-u}\left[\int_0^\infty \alpha^{p-1}e^{-\alpha u}d\alpha\right]du=$$

$$=\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-u}\left[\frac{1}{u^p}\int_0^\infty (\alpha u)^{p-1}e^{(-\alpha u)}\, d(\alpha u)\right]du$$

Notînd $\alpha u=v$, simplificînd prin u^p şi ţinînd seama de formula (3.2.8)', obţinem

$$\Gamma(p+q)B(p, q)=\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}du\int_0^\infty v^{p-1}e^{-v}\, dv.$$

adică :

$$\Gamma(p+q)B(p, q)=\Gamma(q)\Gamma(p)$$

De aici urmează relaţia dintre funcţia $B(p, q)$ şi funcţia $\Gamma(p)$:

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Exemplu.

$$B(4.6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\frac{3\,!\,5\,!}{9\,!}=0{,}0019$$

3.3. *Integrala Euler-Poisson.* În primul rînd, să demonstrăm că integrala I este convergentă. Deoarece putem scrie :

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}\, dx+\int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

observăm că problema convergenţei se pune doar pentru cea de a doua integrală care este o integrală de tip 1.1. Funcţia e^{-x^2} pe intervalul $[1, +\infty]$ poate fi majorată astfel :

$$e^{-x^2}\leqslant e^{-x},\quad x\geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

va rezulta că $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă.

Am arătat în §3, formula (3.2.9) că valoarea integralei I este :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Totodată, putem demonstra că :

(3.3.12) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Pornind de la aceste două integrale se pot obține alte formule ce au aplicație în teoria probabilităților. Astfel, efectuînd substituția $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$, $\left(dx = \frac{du}{\sqrt{2}}, x=0, u=0; x=+\infty, u=+\infty\right)$, obținem :

(3.3.12)' $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Făcînd aceeași substituție în (3.3.12), se găsește :

(3.3.13) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Sub o altă formă, această integrală mai poate fi scrisă astfel:

(3.3.14) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

Acest rezultat are o anumită interpretare geometrică și anu-

Scanned with OKEN Scanner

me: Să acceptăm, prin extensiunea noțiunii de integrală definită, că

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

reprezintă prin valoarea sa numerică în cazul în care este convergentă, măsura ariei cuprinsă între graficul funcției $f(x)$, axa Ox și dreapta $x=a$. Atunci, considerînd funcția $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (clopotul lui Gauss), care are un maxim în punctul $x=0$, $\left(\text{în care } f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, faptul că integrala din (3.3.14) are valoarea 1, înseamnă că aria cuprinsă între graficul funcției $f(x)$ și axa Ox este egală cu unitatea (fig. 3.3.2).

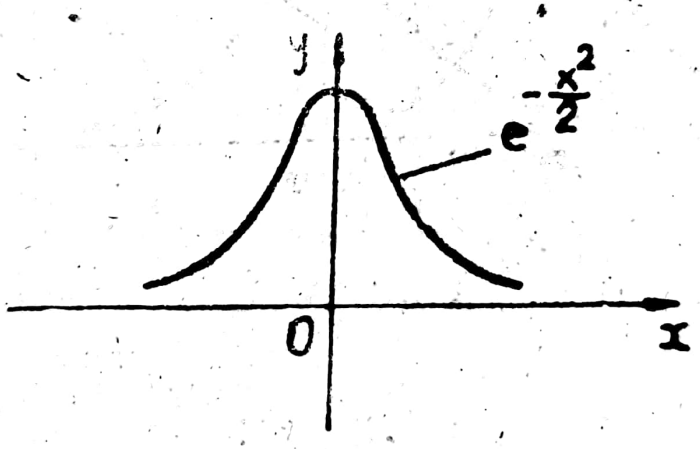


Fig. 3.3.2.

Mai general, se poate considera funcția

$$f(x, a, b)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \tag{3.3.15}$$

definită pentru orice $x\in R$, $a\in R$, și $b>0$.

Se poate demonstra că funcția $f(x, a, b)$ are un maxim (absolut) în punctul $x=a$, valoarea maximului fiind $f_{max}=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}$.

Efectuînd substituția $\frac{x-a}{b}=u$, obținem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, a, b)dx = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} b\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

și rezultatul geometric cu privire la aria determinată de graficul funcției $f(x, a, b)$ se păstrează.

Indiferent ce valori au parametrii $a \in R$, $b > 0$, graficele funcțiilor $f(x, a, b)$ au forma de „clopot". Parametrul a definește axa de simetrie a curbei în timp ce parametrul b caracterizează gradul de „turtire" a graficului.

În figura 3.3.3 sînt redate, pentru comparație, graficele funcțiilor $f_1(x, a, b)$ $(a > 0, b > 1)$ și $f_2(x, a, b)$ $(a = -1, b = 1)$.

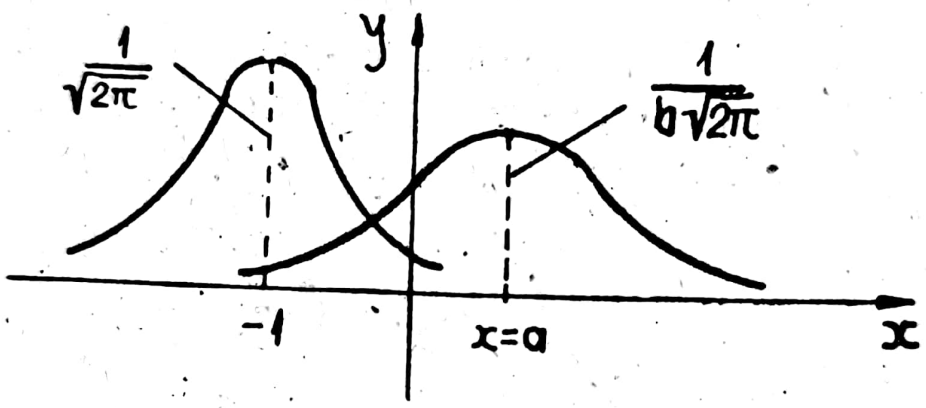


Fig. 3.3.3.

Scanned with OKEN Scanner

§4. INTEGRALA DUBLĂ

4.1. *Definiția integralei duble.*

Integrala dublă este o generalizare a integralei unei funcții de o variabilă la funcțiile de două variabile. Prin extinderea acestei noțiuni la funcțiile de trei și mai multe variabile se ajunge la conceptul de integrală multiplă.

În cele ce urmează vom expune succint teoria integralei duble.

Fie D un interval bidimensional închis. Conform definiției (2.15) cap. 2

$$D=\{(x, y)\in R^2 \mid a\leqslant x\leqslant b,\ x\leqslant y\leqslant d\}$$

în care $a<b$ și $c<d$ sînt numere date. Domeniul D se reprezintă în plan prin mulțimea punctelor dreptunghiului $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 3.4.1).

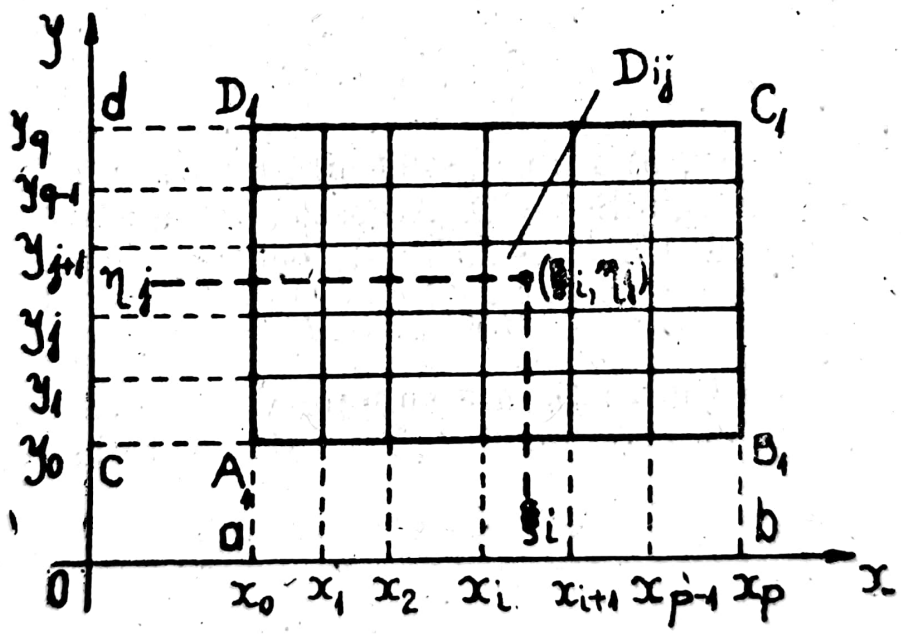


Fig. 3.4.1.

Să presupunem că intervalele $[a, b]$ și $[c, d]$ au fost împărțite în mod arbitrar în p, respectiv q părți prin punctele de diviziune:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_p=b,$$

$$c=y_0<y_1\ldots<y_j<\ldots<y_q=d.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ducînd paralele la axele de coordonate prin aceste puncte dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ se împarte în pq intervale bidimensionale D_{ij}, $i=\overline{0, p-1}$, $j=\overline{0, q-1}$, de dimensiuni $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$. O astfel de împărțire a domeniului D o vom numi *diviziune a lui* D și o vom nota cu Δ. Evident, sînt posibile și alte diviziuni ale intervalului D.

Notăm cu $\nu(D_{ij})$ lungimea diagonalei dreptunghiului D_{ij} și cu ω_{ij} aria acestuia. Avem $\omega_{ij}=(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)=\Delta x_i \Delta y_i$; $i=\overline{0, p-1}$, $j=\overline{0, q-1}$.

Definiția 3.4.1. Se numește *normă* a diviziunii Δ numărul $\nu(\Delta)$ definit prin relația:

$$\nu(\Delta)=\max_{\substack{0\leqslant i\leqslant p-1\\ 0\leqslant j\leqslant q-1}} \nu(D_{ij})$$

Fie $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ un șir de diviziuni ale dreptunghiului D. și $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ normele corespunzătoare acestor diviziuni.

Definiția 3.4.2. Șirul (Δ_n) se numește *șir normal de diviziuni* dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(\Delta_n)=0$$

Fid acum $f(x, y)$ o funcție definită pe domeniul dreptunghiular D și mărginită pe D. Aceasta înseamnă că se poate găsi o constantă $M>0$ astfel încît, pentru orice $(x, y)\in D$,

$$|f(x, y)|\leqslant M$$

Să considerăm în fiecare subinterval D_{ij} cîte un punct arbitrar P_{ij}, de coordonate (ξ_i, η_j) și să formăm suma

$$S(\Delta)=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j \tag{3.4.1}$$

Evident, o altă diviziune ne va conduce la o altă valoare a sumei S. Să notăm cu S_k, $k=\overline{1, n}$, suma (3.4.1) atașată diviziunii Δ_k. S_k poartă numele de *sumă integrală Riemann* relativă la diviziunea Δ_k. Fie Δ_k, $k=\overline{1, n}$, un șir normal de diviziuni și

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots : S_n=S(\Delta_n) \tag{3.4.2}$$

șirul sumelor integrale atașate.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3.4.3. Funcția $f: D \to R$ se numește *integrabilă* pe domeniul D, dacă oricare ar fi alegerea punctelor P_{ij} în intervalele fiecărei diviziuni, șirul sumelor integrale are limită pentru $n \to \infty$ și aceasta este finită

$$\lim_{n \to \infty} S_n = I \tag{3.4.3}$$

Numărul I se numește *integrala dublă* a funcției $f(x, y)$ pe intervalul bidimensional D și se notează

$$I = \iint_{(D)} f(x, y)d\omega = \iint_{(D)} f(x, y)dxdy$$

Mulțimea D se numește *domeniul de integrare*. Să observăm că, integrala unei funcții $f(x, y)$, atunci cînd există, depinde numai de forma funcției și de domeniul de integrare. Prin urmare :

$$\iint_{(D)} f(x, y)dxdy, \quad \iint_{(D)} f(u, v)du\,dv, \quad \iint_{(D)} f(r, \theta)dr\,d\theta$$

reprezintă unul și același număr.

Funcțiile pentru care limita (3.4.3) există se numesc *integrabile* în sens Riemann. Menționăm că integrala dublă poate fi definită și cu ajutorul sumelor Darboux. În cazul funcțiilor integrabile, cele două definiții sînt echivalente. Se poate demonstra că o condiție suficientă de existența a integralei funcției f pe D este ca ea să fie continuă pe domeniul D.

Exemplu. Să considerăm funcția $f(x, y) = C$ (C=const.) definită pe dreptunghiul :

$$D : \{a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d\}$$

Evident, $f(x, y)$ este continuă pe D. Să considerăm un șir de diviziuni normale $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ale domeniului D. Observînd că pentru $(\xi_i^{(k)}, \eta_j^{(k)}) \in D_k$, $k = \overline{1, n}$, $f(\xi_i^{(k)}, \eta_j^{(k)}) = C$, vom avea :

$$S_n = S(\Delta_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i^{(n)}, \eta_j^{(n)})\omega_{ij}^{(n)} = C \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \omega_{ij}$$

Cum $\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \omega_{ij} = A$, A fiind aria dreptunghiului D,

Scanned with OKEN Scanner

vom avea :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = CA \; ; \; C=(b-a)(d-c)$$

Deci, şirul sumelor Riemann ataşate funcţiei $f(x, y)=C$ este convergent şi are ca limită numărul CA. Rezultă că funcţia $f(x, y)=C$ este integrabilă pe D şi :

$$\iint\limits_{(D)} C\,dx\,dy = C \text{ aria } D$$

În particular, dacă $C=1$, se obţine

$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy = \text{aria} D = A$$

Vom vedea că această ultimă proprietate se extinde la un domeniu D oarecare pentru care se poate vorbi de aria sa.

4.2. *Interpretarea geometrică a integralei duble.*

Fie funcţia $z=f(x, y)$ definită pe dreptunghiul D şi integrabilă pe D. adică

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy$$

este un număr bine determinat. Ne propunem să vedem ce interpretare geometrică i se poate da integralei de mai sus, Presupunem că $f(x, y)>0$.

Considerăm un sistem triortogonal de axe $Oxyz$ şi reprezentăm mulţimea D prin dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ din planul xOy (fig. 3.4.2). Am văzut că imaginea geometrică a funcţiei $z=f(x, y)$ în spaţiu este o suprafaţă. Divizăm dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ în n dreptunghiuri de laturi Δx_i şi Δy_j şi luăm în fiecare dreptunghi punctul arbitrar $P_k(\xi_i^{(k)}, j_j^{(k)})$, $k=\overline{1, n}$. Observăm că expresia :

$$f(\xi_i^k, \eta_j^{(k)})\Delta x_i \Delta x_j = f(P_{ij}^{(k)})\omega_{ij}^{(k)}$$

reprezintă, volumul unei prisme care are drept bază dreptunghiul elementar D_{ij} şi ca înălţime segmentul de lungime $f(P_{ij})$. Suma volumelor acestor prisme (să le numim elementare) este :

Scanned with OKEN Scanner

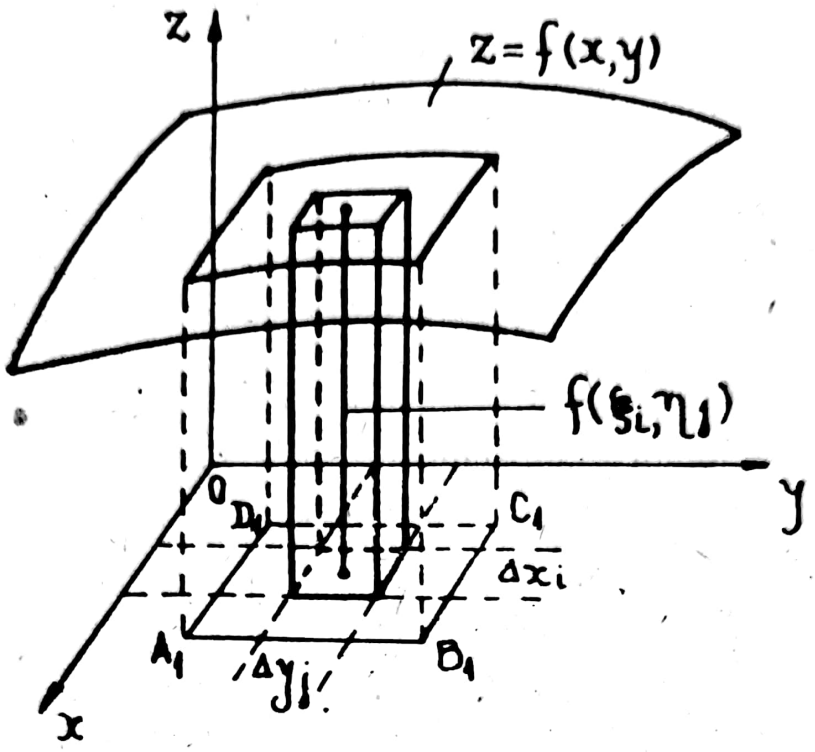


Fig. 3.3.4.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Sigma f(P_{ij}^{(k)})\omega_{ij}^{(k)}$$

Pe de altă parte, dacă ne-am propune să calculăm volumul prismei avînd drept bază inferioară dreptunghiul D și drept „bază superioară" porțiunea din suprafața $z=f(x, y)$ a cărei proiecție dreaptă în planul xOy este însăși dreptunghiul D am observa că putem aproxima acest volum cu suma S_n. Intuitiv, se vede că aproximația va fi cu atît mai bună cu cît numărul prismelor elementare va fi mai mare. Această observație ne sugerează să considerăm limita sumei S_n, pentru $n\to\infty$ și dacă aceasta este finită să definim drept măsură a volumului căutat, însăși această limită, adică

$$V=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(P_{ij}^{(k)})w_{ij}^{(k)}$$

Pe de altă parte, limita din membrul al doilea, cînd aceasta există, definește integrala dublă a funcției f pe domeniul D,, și vom putea scrie:

$$V=\iint_{(D)} f(x, y)dxdy$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă de aici interpretarea geometrică dorită și anume : Integrala

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dxdy$$

este măsura volumului prismei cu generatoarele paralele cu Oz, care are ca bază, domeniul D din planul xOy și este limitată la partea superioară de acea porțiune din suprafața $z=f(x, y)$ a cărei proiecție dreaptă este domeniul D.

Integrala dublă pe un domeniu oarecare, regulat.

Considerațiile de mai sus s-au limitat la cazul cînd domeniul de integrare al funcției $f(x, y)$ este un dreptunghi. Este natural să ne întrebăm cum se introduce noțiunea de integrală dublă a funcției $f(x, y)$ cînd aceasta este definită pe un domeniu (închis) mai complicat decît dreptunghiul cum ar fi, de exemplu, mulțimea punctelor care se situează în interiorul unei curbe închise (C) din plan, inclusiv punctele de pe curbă.

Fie deci $z=f(x, y)$ o funcție definită și mărginită într-un domeniu mărginit $\Omega \subset R^2$. Considerăm un dreptunghi D, avînd laturile paralele cu axele de coordonate, și care conține pe Ω Definim pe D, o nouă funcție $F(x, y)$ astfel :

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y) & (x,y)\in\Omega \\ 0 & (x,y)\in D\setminus\Omega. \end{cases}$$

Evident, funcția $F(x, y)$ este mărginită pe dreptunghiul D.

Definiția 3.4.4. Spunem că funcția $z=f(x, y)$ este *integrabilă* pe Ω dacă $F(x, y)$ este integrabilă pe D și atribuim, ca valoare o integrală funcției f pe domeniul Ω integrala funcției F pe domeniul D :

$$\iint_{(\Omega)} f(x,y)dxdy \equiv \iint_{(D)} F(x,y)dxdy$$

Se poate demonstra că definiția integralei funcției f pe domeniul Ω este independentă de alegerea dreptunghiului D.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3.4.5. Se numește *domeniu plan regulat* un domeniu mărginit a cărui frontieră este o curbă sau o reuniune finită de arce de curbă de forma $y=f(x)$ (sau $x=g(y)$) în care funcția $f(x)$ (respectiv, $g(y)$), este continuă. Astfel de domenii plane sînt, de exemplu :

1. domeniul mărginit de un poligon (fig. 3.4.2.a). Frontiera acestui domeniu este alcătuită dintr-un număr finit de segmente A_1B_1, ..., care sînt situate pe dreptele $y_i=y_i(x)=a_ix+b_i$, $i=1, 2, ..., n$. (În figură, $n=5$).

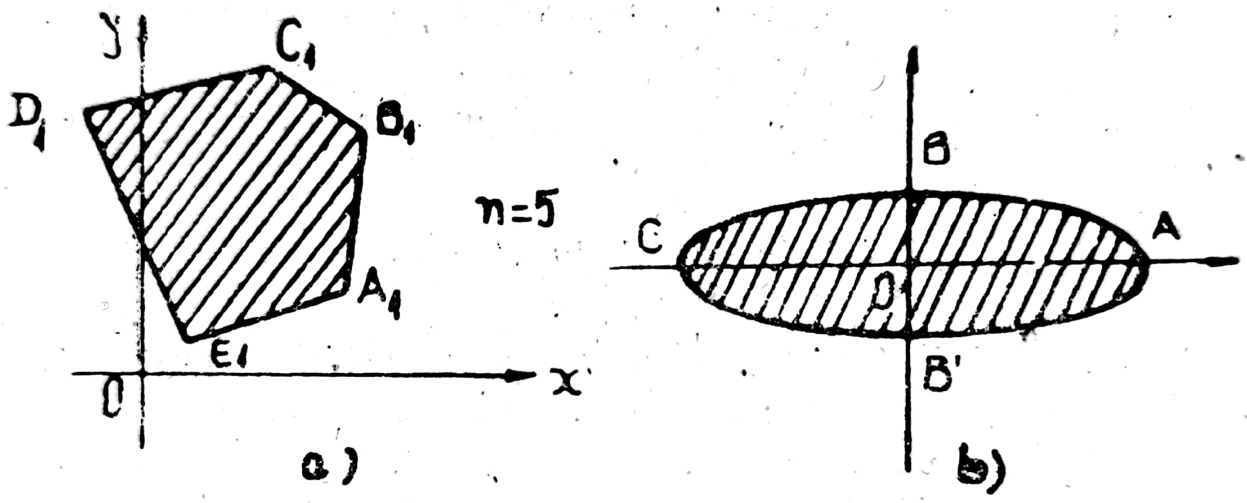


Fig. 3.4.2.

2. domeniul mărginit de o elipsă. Se știe că elipsa cu centrul în origine este definită de ecuația :

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Frontiera acestui domeniu poate fi deci considerată ca reuniune de două arce de elipsă : arcul ABC, definit prin ecuația $y_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ și arcul $AB'C$, de ecuație $y_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, sau altfel, ca reuniune a arcelor BAB', de ecuația $x_1=\frac{a}{b}\sqrt{a^2-y^2}$ și $B'CB$ a cărui ecuația este $x_2=-\frac{a}{b}\sqrt{a^2-y^2}$ (fig. 3.4.5.b).

Scanned with OKEN Scanner

Adesea, pentru calculul integralei duble, domeniul trebuie împărțit într-un număr finit de domenii $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Se demonstrează că dacă fiecare dintre domeniile $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ este regulat, aceeași proprietate o are și $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$.

În cele ce urmează vom presupune că mulțimea pe care se face integrarea este un domeniu regulat.

4.3. *Proprietăți ale integralei duble.*

Dăm mai jos cîteva proprietăți ale integralei duble, care rezultă din însăși definiția acesteia.

1. Funcția $f(x, y)=C$ (C=const.) definită pe Ω este integrabilă și:

$$\iint_{(\Omega)} C\,dx\,dy = C \iint_{(\Omega)} dx\,dy = C \text{ aria } \Omega.$$

2. Dacă $f(x, y)$ este integrabilă pe Ω și C o constantă, atunci funcția $Cf(x, y)$ este integrabilă pe Ω și:

$$\iint_{(\Omega)} Cf(x, y)\,dx\,dy = C \iint_{(\Omega)} f(x, y)\,dx\,dy$$

3. (*Adivtivitate* cu privire la funcție). Dacă $f(x, y)$ și $g(x, y)$ esînt integrabile pe Ω, atunci funcția $f(x, y)+g(x, y)$ este integrabilă pe Ω și:

$$\iint_{(\Omega)} (f(x,y)+g(x,y))\,dx\,dy = \iint_{(\Omega)} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{(\Omega)} g(x,y)\,dx\,dy$$

4. Dacă $f(x,y)$ și $g(x,y)$ sînt integrabile pe Ω, și dacă $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ atunci:

$$\iint_{(\Omega} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint_{(\Omega)} g(x, y)\,dx\,dy$$

5. Dacă $f(x, y)$ este o funcție integrabilă pe domeniul Ω și dacă α și β sînt două numere astfel încît

$$\alpha \leqslant f(x, y) \leqslant \beta$$

atunci:

Scanned with OKEN Scanner

$$\alpha \text{ aria } \Omega \leqslant \iint\limits_{(\Omega)} f(x, y)dxdy \leqslant \beta \text{aria} \Omega.$$

6. (Aditivitatea cu privire la domeniu). Dacă domeniul Ω se descompune în două domenii Ω_1 și Ω_2, disjuncte

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \qquad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$$

atunci:

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(\Omega_1)} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{(\Omega_2)} f(x, y)dxdy$$

Demonstrațiile acestor proprietăți pot fi găsite, de exemplu, în [10].

4.4. *Calculul integralei duble.*

În cele ce urmează vom arăta că integrala dublă pe un domeniu plan regulat se reduce la calculul unor integrale simple repetate.

Fie $f(x, y)$ o funcție definită și integrabilă pe domeniul regulat Ω. Pentru moment, vom presupune că domeniul Ω este supus restricției că orice paralelă la axa Oy nu întîlnește frontiera lui Ω decît în cel mult două puncte (fig. 3.4.4.).

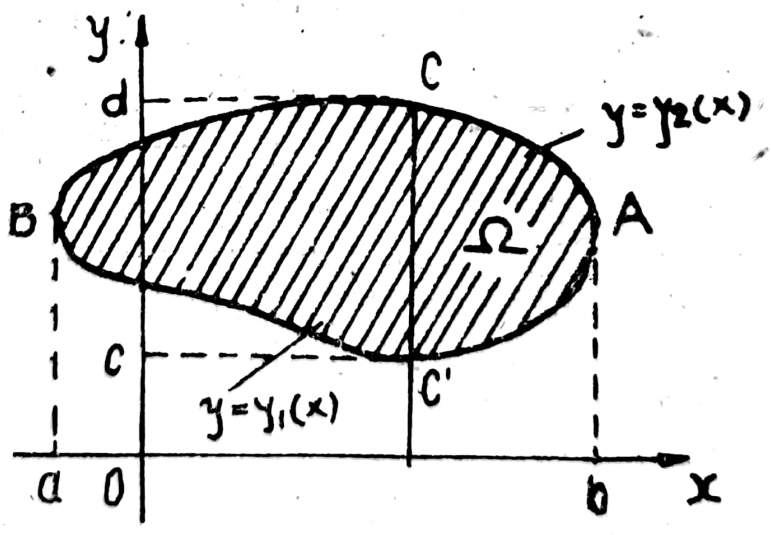


Fig. 3.4.3.

Să notăm cu $[a, b]$ intervalul în care variază x, atunci cînd, un punct mobil descrie frontiera lui Ω și considerăm drep-

Scanned with OKEN Scanner

tele $x=a$, $x=b$, care au în comun cu curba frontieră a lui Ω punctele A și B. Să presupunem că ecuația arcului ACB este $y_2=y_2(x)$, iar cea a arcului $BC'A$ este $y_1=y_1(x)$.

Teorema 3.4.1. Dacă pentru orice $x\in[a, b]$, există integrala

$$F(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

atunci :

$$\iint_{(\Omega)} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx. \tag{3.4.4}$$

Demonstrație. Să considerăm suma Riemann atașată funcției f relativ la un anumit mod de divizare (Δ) a domeniului Ω.

$$S(\Delta)=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1} f(\xi_i\ \eta_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

pe care o însumăm mai întîi după i. Avem

$$S(\Delta)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\sum_{j=0}^{q-1} f(\xi_i,\ \eta_i)(y_{j+1}-y_j)$$

Dacă $x=\xi_i$, este ținut constant, cea de a doua sumă din expresia de mai sus este suma Riemann simplă atașată funcției $f(\xi_i, y)$ privită ca funcție de variabilă y. Considerînd un șir normal de divizuni și trecînd la limita odată cu norma divizării tinzînd la zero, vom obține

$$\lim_{\nu(\Delta)\to 0} S(\Delta)=\iint_{(\Omega)} f(x, y)dxdy=\lim_{p\to\infty}\sum_{i=0}^{p-1}(x_{i+1}-$$

$$x_i)\left(\lim_{q\to\infty}\sum_{j=0}^{q-1} f(\xi_i,\ \eta_j)(y_{j+1}-y_j)\right)=\lim_{p\to\infty}\sum_{i=0}^{p-1}(x_{i+1}-$$

Scanned with OKEN Scanner

$$-x_i)\left(\int_{y_1(\xi_i)}^{y_2(\xi_i)} f(\xi_i,\ y)dy\right) = \lim_{p\to\infty}\sum_{i=1}^{p-1} F(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \int_a^b F(x)dx.$$

unde $y_1(\xi_i)$, $y_2(\xi_i)$ sînt cordonatele punctelor de intersecție ale dreptei $x=\xi_i$ cu arcele de curbă $y_1=y_1(x)$, respectiv $y_2=y_2(x)$, $x\in[a, b]$. Avem, deci, formula:

$$\iint_{(\Omega)} f(x,\ y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)dy\right)dx$$

ceea ce demonstrează teorema.

În mod analog, dacă domeniul Ω are proprietatea că orice paralelă la axa Ox, intersectează frontiera în cel mult două puncte și dacă $x_1=x_1(y)$, $x_2=x_2(y)$ sînt ecuațiile arcelor CBC', respectiv $C'AC$, domeniul de variație a lui y fiind intervalul $[c, d]$, avem formula:

$$\iint_{(\Omega)} f(x,\ y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dxdy.\right. \tag{3.4.5}$$

Observație. Dacă domeniul Ω este intersectat de paralele la Oy sau Ox în mai multe de două puncte, atunci descompunînd acest domeniu prin linii auxiliare în subdomeniile $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ (în fig. 3.4.4, $n=2$) fără puncte comune, care se bucură de proprietatea că orice paralelă la Oy sau Ox, le intersectează în cel mult două puncte. Ținînd seama de proprietatea de aditivitate 6, vom exprima integrala pe domeniul printr-o sumă de integrale pe domeniile Ω_s, $s=\overline{1, n}$.

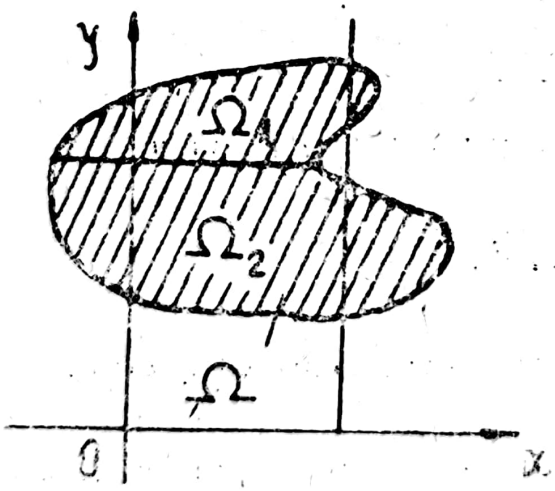


Fig. 3.4.4.

$$\iint_{(\Omega)} f(x,\ y)dxdy = \sum_{s=1}^{n} \iint_{(\Omega_s)} f(x,\ y)dxdy$$

Scanned with OKEN Scanner

unde pentru calcularea fiecărei integrale se aplică formula de descompunere în integrale simple repetate. Din cele arătate mai sus, rezultă următoarele etape de calcul a integralei funcției $f(x, y)$ pe domeniul Ω :

1. Se reprezintă în planul xOy, față de un sistem de axe rectangulare domeniul Ω. De obicei acesta este indicat geometric sau dat prin ecuațiile analitice ale arcelor de curbă care alcătuiesc frontiera sa.

2. Cercetăm dacă paralele la axele de coordonate Ox și Oy intersectează domeniul Ω în mai mult de două puncte. Dacă acest lucru se întîmplă, descompunem pe Ω într-un număr de porțiuni Ω_s, astfel încît pentru fiecare domeniu Ω_s să fie satisfăcută proprietatea enunțată mai sus. Dacă însuși Ω are această proprietate, trecem la etapa următoare.

3. Determinăm intervalul de variație a lui x parcurgînd frontiera lui Ω. Să presupunem că domeniul de variație a lui x este intervalul $[a, b]$. Printr-un punct x arbitrar din acest interval ducem o paralelă la axa Oy și determinăm ordonatele punctelor de intersecție ale acestei drepte cu curba frontieră. Obținem astfel limitele de integrare :

$$y_1 = y_1(x), \qquad y_2 = y_2(x)$$

în raport cu y.

4. Se calculează mai întîi integrala în raport cu y :

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

în care x se consideră ca parametru. Rezultatul este, evident, o funcție de x.

5. Se efectuiază apoi integrarea în raport cu x, între limitele de variație ale acestuia, adică de la a la b.

Calea descrisă mai sus corespunde calculului integralei duble, cu ajutorul formulei (3.4.4). Formula (3.4.4) se aplică în mod similar integrînd mai întîi în raport cu x(y — parametru) și apoi în raport cu y.

Scanned with OKEN Scanner

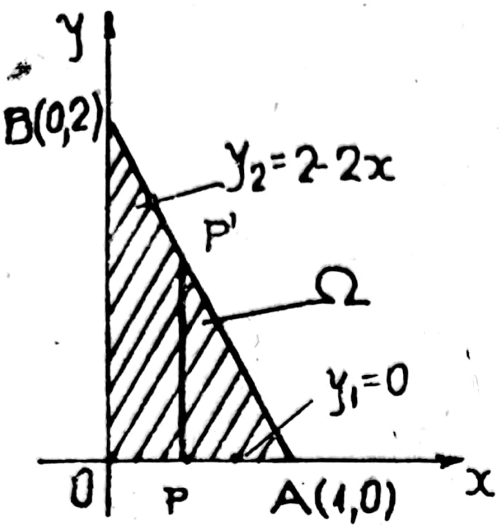


Fig. 3.4.5

Exemple.

1. Să se calculeze $I=\iint\limits_{(\Omega)}(x+y)dxdy$ unde Ω este determinat de triunghiul din fig. 3.4.5. Observăm că paralele la Ox și Oy taie pe Ω în cel mult două puncte, iar mulțimea punctelor domeniului Ω este :

$$\Omega=\{(x,\ y)\in R^2 | x\geqslant 0,$$

$$y\geqslant 0,\ 2x+y-2\leqslant 0\}.$$

Conform formulei (3.4.4) vom avea :

$$\iint\limits_{(\Omega)}(x+y)dxdy=\int\limits_0^A\left(\int\limits_P^{P'}(x+y)dy\right)dx$$

Observăm cu x variază în intervalul [0, 1], iar punctele P și P' se găsesc respectiv pe dreptele de ecuații $y=0$ și $2x+y-2=0$. Scoțînd pe y din această ecuație, obținem $y=2-2x$, ceea ce ne arată că y variază între limitele $y_1(x)=0$, $y_2(x)=2-2x$. De aici înainte calculele sînt foarte simple :

$$\iint\limits_{(\Omega)}(x+y)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2-2x}(x+y)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-2x}dx=$$

$$=2\int\limits_0^1(1-x)dx=1\ ;\qquad I=1.$$

2. Să se calculeze $I=\iint\limits_{(\Omega)}xydxdy$ unde Ω este domeniul, definit astfel :

$$\Omega=\{x^2+y^2-a^2\leqslant 0,$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

Domeniul Ω este cel din fig. 3.4.6

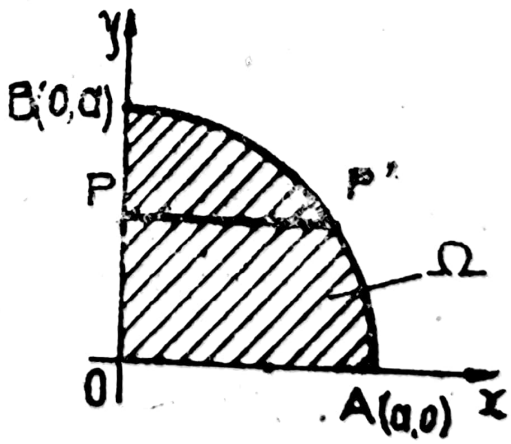


Fig. 3.4.6

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci

$$I=\iint\limits_{(\Omega)} xydxdy=\int\limits_0^B\left(\int\limits_P^{P'} xydx\right)dy=\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} xy\,dx\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^a y\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^a y(a^2-y^2)dy=\frac{1}{8}a^4$$

Observații.

1. Dacă funcția $f(x,\ y)$ este integrabilă pe dreptunghiul

$$\Omega=\{a\leqslant x\leqslant b,\ \ c\leqslant y\leqslant d\}$$

din formulele (3.4.4) și (3.4.5), rezultă:

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,\ y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,\ y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,\ y)dx\right)dy.$$

2. Dacă $f(x,\ y)=F(x)G(y)$ integrala dublă a funcției f extinsă la dreptunghiul Ω se descompune într-un produs de două integrale simple și anume:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)dxdy=\int\limits_a^b F(x)dx\int\limits_c^d G(y)dy$$

Exemplu. Să se calculeze

$$I=\iint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)dxdy$$

Ω fiind dreptunghiul

$$\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 3\}$$

Avem

$$\iint\limits_{(\Omega)}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^3(x^2+y^2)dy\right)dx=\int\limits_0^3\left(\int\limits_0^1(x^2+y^2)dx\right)dy$$

Calculînd cele două integrale găsim:

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^3(x^2+y^2)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^3 dx=3\int\limits_0^1(x^2+3)dx=10$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_0^3 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)dx \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^3 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy = 10$$

Cele două integrale sînt într-adevăr egale și egale cu 10. Deci $I=10$.

4.5. SCHIMBAREA DE VARIABILĂ ÎN INTEGRALA DUBLĂ

Metoda de integrare prin schimbarea variabilei de integrare cunoscută pentru funcțiile de o variabilă se extinde cu unele precizări suplimentare, la calculul integralele duble. Pentru aceasta se introduce noțiunea de determinant funcțional care joacă, într-un anumit sens, rolul derivatei din formula amintită.

Fie $u(x, y)$, $v(x, y)$ două funcții reale, definite într-un domeniu $D \in R^2$, derivabile parțial în raport cu x și y în D.

Definiția 2.4.1. Se numește *determinant funcțional* sau *Jacobian* al funcțiilor u și v, cu privire la x și y, următorul determinant

$$(3.4.6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \; *)$$

exprimat cu ajutorul derivatelor parțiale de ordinul întîi ale funcției $f(x, y)$.

Determinantul funcțional al funcțiilor u și v, în raport cu variabilele x și y, se notează cu :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \text{ sau } \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

Exemplu. Fie $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, două funcții de variabilele r și θ. Dacă $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, perechea (r, θ) definește *coordonatele polare* ale unui punct din plan.

---

*) Am întîlnit această expresie în Cap. 2, §6, cu prilejul studiului extremelor condiționate.

Scanned with OKEN Scanner

Să calculăm $\dfrac{D(x,\ y)}{D(r,\ \theta)}$

Avem

$$\frac{D(x,\ y)}{D(r,\ \theta)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=$$

$$=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

Fie Ω un domeniu în planul $(x,\ y)$ și

$$x=x(u,v) \qquad y=y(u,v) \tag{3.4.7}$$

două funcții definite pe domeniul Ω^*, din planul $(u,\ v)$. Funcțiile (3.4.7) care definesc transformarea de la planul $(u,\ v)$ la planul $(x,\ y)$ realizează o corespondență între punctele domeniului Ω^* și acelea ale domeniului Ω.

Să presupunem că funcțiile $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ au derivate parțiale în raport cu variabilele u și v.

Dacă $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\neq 0$, corespondența dintre domeniile Ω^* și Ω este biunivocă.

Să notăm cu

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|$$

valoarea absolută (modulul) determinantului funcțional $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$. Se poate arăta că, dacă $f(x,\ y)$ este integrabilă pe Ω, atunci funcția:

$$[fx(u,\ v),\ y(u,\ v)]\cdot\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|$$

este integrabilă pe Ω^*.

Cu aceste precizări putem enunța următoarea teoremă.

Teorema 3.4.2. Dacă $f(x,\ y)$ este integrabilă pe Ω atunci:

$$\iint_{\Omega} f(x,\ y)dxdy=\iint_{\Omega^*} f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]\cdot\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| dudv \tag{3.4.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [16].

Formula (3.4.8) poartă numele de formula schimbării de variabile în integrala dublă.

Prin acest procedeu se simplifică fie forma domeniului de integrare, fie forma funcției de integrat.

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$\iint_{\Omega} dx\,dy$$

unde Ω este domeniul determinat de inecuația $x^2+y^2\leqslant R^2$.

Domeniul Ω este discul de raza R, cu centrul în origine. Să efectuăm transformarea:

(3.4.9) $$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

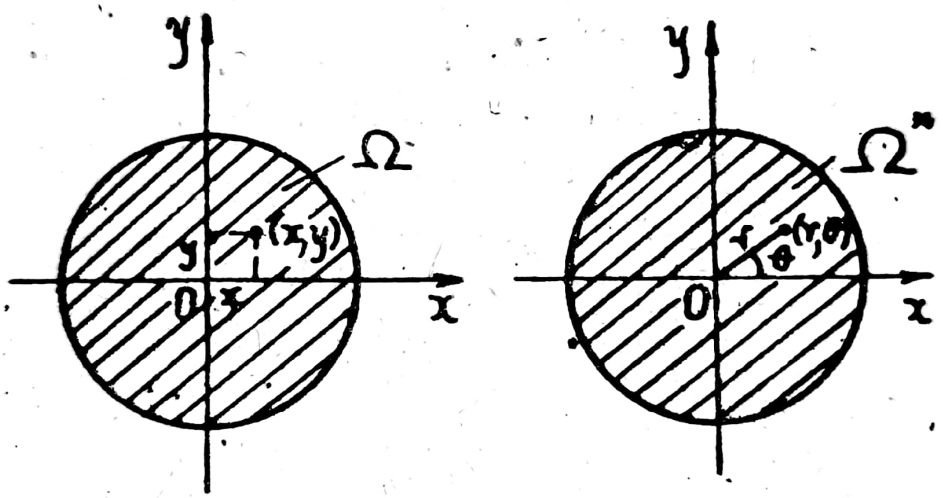


Fig. 3.4,7

Am văzut că $\dfrac{D(x,\ y)}{D(r,\ \theta)}=r.$

Observăm că atunci cînd θ variază între 0 și 2π, iar r între 0 și R punctul $(x,\ y)$ ale cărui coordonate sînt date de relațiile (3.4.9) descrie domeniul Ω^* (fig. 3.4.7)

Aplicînd formula (3.4.8) avem

$$\iint_{\Omega} dxdy = \iint_{\Omega^*} \left|\frac{D(x,\ y)}{D(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \iint_{\Omega^*} rdrd\theta =$$

$$= \int_0^R rd\,r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. Să se evalueze integrala:

$$K(a)=\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy, \quad \Omega:\{0\leqslant x\leqslant a\ ;\ 0\leqslant y\leqslant a\}$$

pentru valori oricît de mari ale lui a.

Domeniul Ω este format din mulțimea punctelor pătratului de latura a, situat în primul cadran (fig. 3.4.8).

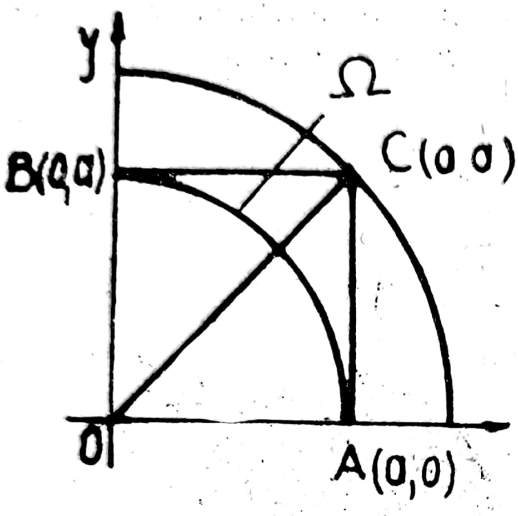


Fig. 3.4.8

Să considerăm domeniile Ω_1 și Ω_2 determinate de sferturile circumferințelor de raze a și, respectiv, $a\sqrt{2}$:

$$\Omega_1:\{x^2+y^2\leqslant a^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$$

$$\Omega_2:\{x^2+y^2\leqslant 2a^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$$

Evident, $\Omega_1\subset\Omega\subset\Omega_2$.

Ținînd seama de interpretarea geometrică a integrale duble, incluziunilor de mai sus le corespunde dubla inegalitate:

$$\iint_{\Omega_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy<\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy<\iint_{\Omega_2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

Vom calcula acum integralele pe domeniile Ω_1 și Ω_2. Considerăm integrala pe Ω_1. Trecînd în coordonate polare, avem:

$$\iint_{\Omega_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^a e^{-r^2}\,d(r^2)=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$

În mod analog, ținînd seama că $0\leqslant r\leqslant a\sqrt{2}$, cea de a doua integrală ne dă:

$$\iint_{\Omega_2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

Scanned with OKEN Scanner

Așadar :

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})<k(a)<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

Trecînd la limită pentru $a\to\infty$, din dubla inegalitate de mai sus obținem

$$\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}(1-e^{-a^2})\leqslant\lim_{a\to\infty}k(a)\leqslant\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}(1-e^{-2a^2})$$

de unde rezultă :

$$\lim_{a\to\infty}K(a)=\frac{\pi}{4}$$

sau :

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4} \tag{3.4.10}$$

Observăm că pentru $a\to\infty$, pătratul de latura a, devine sfertul de plan $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, adică domeniul de integrare, Ω, se transformă într-un domeniu nemărginit. Totuși, după cum se constată din formula de mai sus, se poate vorbi de integrala funcției $e^{-(x^2+y^2)}$ pe acest domeniu *nemărginit*, dacă convenim să o înțelegem în sensul limitei de mai sus. Notînd această limită cu

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

putem scrie formula (3.4.10) sub forma

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\lim_{a\to\infty}\int_0^a\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}.$$

Integrala din membrul întîi sugerează noțiunea de *integrală dublă improprie* pe un domeniu nemărginit prin analogie cu integrala improprie cu limite infinite, definită în Cap. 3, § 1. Utilizînd aceeași definiție, ca și în cazul funcțiilor de o variabilă, putem spune că integrala dublă pe domeniul nemărgi-

Scanned with OKEN Scanner

nit $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, a funcției $e^{-(x^2+y^2)}$ are sens (este convergentă) și valoarea este egală cu $\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} \tag{3.4.11}$$

În continuare să observăm că putem scrie :

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\pi}{4}$$

cele două integrale din membrul drept fiind integrale Euler-Poisson. Prin urmare, vom avea :

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

De aici, obținem pe altă cale valoarea integralei lui Euler-Poisson și anume :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cu ajutorul formulei (3.4.11), se poate deduce ușor valoarea integralei duble a funcției $e^{-(x^2+y^2)}$ extinsă la tot planul, deoarece putem scrie :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi$$

sau:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 1$$

Sub raport geometric, această formulă ne sugerează faptul că volumul mărginit de suprafața $z = e^{-(x^2+y^2)}$ (clopotul lui Gauss)

Scanned with OKEN Scanner

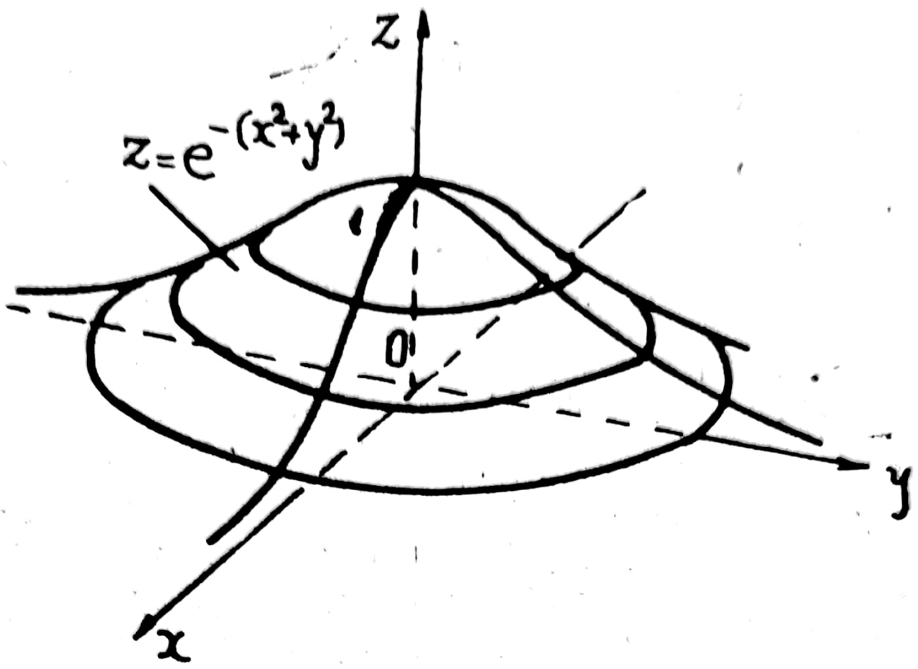


Fig. 3.4.9

(fig. 3.4.9), și planul xOy este egal cu unitatea. Sensul matematic al acestei proprietăți este explicat în teoria probabilităților.

Observație. În același mod ca mai sus se poate defini integrala dublă improprie a unei funcții $f(x, y)$ (mărginită) relativ la un domeniu *nemărginit* oarecare.

Se poate de asemenea, introduce noțiunea de integrală dublă improprie a unei funcții, $f(x, y)$ definită și mărginită, pe un domeniu finit cu excepția unuia sau a mai multor puncte în care $f(x, y)$ are valore infinită, (integrala dublă improprie dintr-o funcție nemărginită);

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4. *AJUSTĂRI ȘI INTERPOLĂRI*

§1. AJUSTĂRI ANALITICE. METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

1.1. *Probleme generale.*

Datele statistice referitoare la un fenomen economic a cărui desfășurare este supusă observației se dispun, în general, neuniform datorită naturii lor sau a erorilor (sistematice sau accidentale) care însoțesc cercetarea fenomenului.

Dacă reprezentăm pe axa Ox valorile unui parametru ce caracterizează evoluția fenomenului, iar în ordonată o mărime ce descrie comportarea fenomenului, obținem o succesiune de puncte în plan care în mod curent poartă numele de *graficul empiric* al funcției ce descrie matematic desfășurarea fenomenului, funcției care, în general, nu este cunoscută.

Pentru a exemplifica, să presupunem că se urmărește stabilirea funcției de cerere a unei anumit sort de marfă într-un sezon. Pentru aceasta, se alege pentru testare un magazin care este cel mai reprezentativ dintr-o anumită zonă a unui oraș și se urmăresc zilnic timp de o lună vînzările la marfa respectivă. Dacă notăm cu t, timpul și cu Q cantitatea de marfă vîndută, atunci la momentele $t_1, t_2, \ldots, t_{30}$ (reprezentînd numărul de zile din luna respectivă) se vor obține, pentru cantitatea de marfă vîndută, valorile: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{30}$. Reprezentînd în plan aceste puncte vom obține graficul empiric din fig. 4.1.1.

Examinarea graficului empiric ne dă o informație destul de sumară a evoluției fenomenului, din care nu putem spune care a fost desfășurarea acestuia la momentele anterioare lui t_1 și nici nu putem prevedea cum se va desfășura după momentul t_{30}. De asemenea, nu putem afirma nimic ce se întîmplă între momentele t_1 și t_2, t_3 și t_4, etc. La aceste probleme

Scanned with OKEN Scanner

s-ar putea da un răspuns exact numai dacă s-ar cunoaște funcția cererii în mod explicit.

Cum această funcție este necunoscută sîntem nevoiți s-o aproximăm, folosindu-se numai de datele empirice pe care le avem la dispoziție, (din punct de vedere geometric, cunoscînd graficul empiric). În literatura de specialitate această operație poartă numele de *ajustare*. Metodele de ajustare oferă astfel date despre evoluția fenomenului real fără însă a-l reda cu exactitate. Dintre metodele de ajustare (grafice, geometrice, mecanice, etc.,) ne vom opri asupra *ajustării analitice* bazată pe *metoda celor mai mici pătrate*.

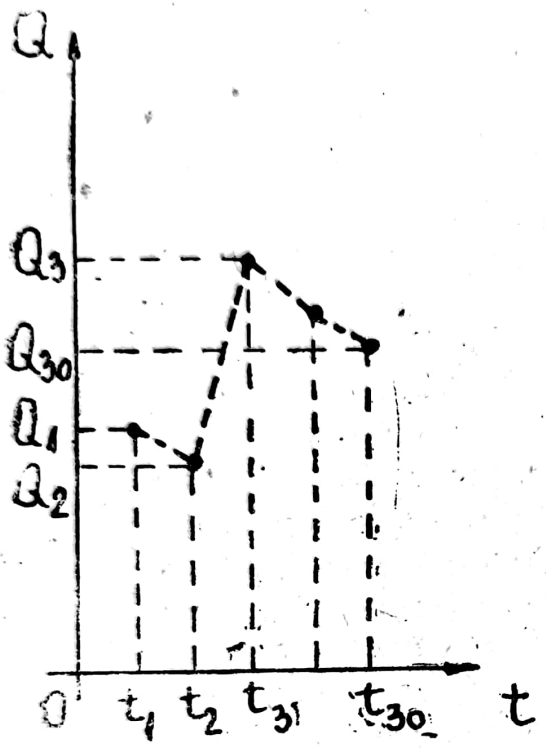


Fig. 4.1.1

Ajustarea analitică pornește de la ipoteza că evoluția sau tendința de desfășurare a unui fenomen poate fi reprezentată geometric printr-o curbă continuă al cărei grafic (dreaptă, parabolă, exponențială, etc.) se adaptează „cel mai bine" graficului empiric ce descrie fenomenul. Funcția al cărei grafic are proprietatea de mai sus se numește *funcție de ajustare*.

Pentru a vedea cum poate fi determinată o astfel de funcție, să presupunem că pe baza analizei fenomenului urmărit, am obținut un sistem de valori (x_i, y_i), $i=\overline{1, n}$ cărora le corespund, în planul xOy punctele $M_i(x_i, y_i)$, (fig. 4.1.2)

Să admitem că modul în care se dispun punctele M_i în plan ne sugerează să formulăm ipoteza că evoluția fenomenului este descrisă de o anumită funcție continuă al cărui grafic este curba (C). Ducem prin M_i paralele la axa Oy și notăm cu M_i' punctele de intersecție ale acestora cu curba (C). Deoarece punctele M_i nu se află în general pe curba (C)

Scanned with OKEN Scanner

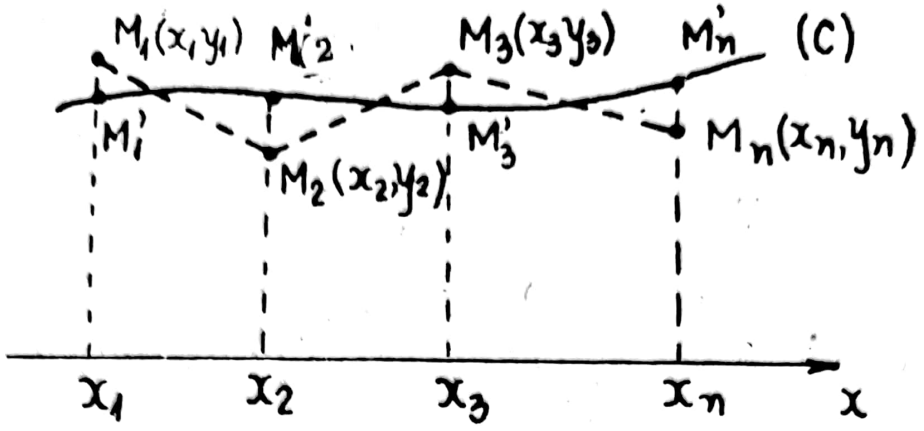


Fig. 4.1.2.

abaterile acestor puncte de la curba (C) pot fi caracterizate cu ajutorul segmentelor $M_1'M_1$, $M_2'M_2$, ..., $M_n'M_n$, mărimile acestor segmente fiind luate, prin convenție, cu semnul „+" dacă punctele M_i se găsesc deasupra curbei (C) și cu semnul „—" dacă ele se găsesc sub curba (C). Mărimile algebrice ale acestor segmente le vom numi *abateri*. Aceste abateri caracterizează erorile în fiecare punct (erori parțiale) care se produc prin înlocuirea graficului empiric cu curba (C). Să notăm erorile parțiale cu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$:

$$\varepsilon_1 = M_1'M_1, \qquad \varepsilon_2 = M_2'M_2, \ldots, \quad \varepsilon_n = M_n'M_n$$

Măsura în care curba (C) aproximează evoluția fenomenului cercetat este dată de eroarea totală ε, care, trebuie considerată ca o funcție de erorile parțiale:

$$\varepsilon = F(\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots, \ \varepsilon_n)$$

Cel mai simplu ar fi să luăm funcția F de forma:

$$F = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

Se observă imediat că această măsură pentru eroarea totală nu este semnificativă, deoarece erorile parțiale ε_i fiind de semne diferite, prin însumare se pot compensa reciproc, eroarea totală ε putînd rezulta mică chiar dacă erorile parțiale ε_i sînt mari în valoare absolută. Din acest motiv, ca măsură a erorii totale ε se adoptă pentru funcția F forma:

(4.1.1) $$\varepsilon = F(\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots, \ \varepsilon_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots \ \varepsilon_n^2 =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(M_1'M_1)^2+(M_2'M_2)^2+\ldots(M_n'M_n)^2.$$

Această formă a funcției F permite o evaluare mai corectă a gradului de aproximare a graficului empiric prin curba (C), deoarece în acest caz ε_i^2-sînt toate de același semn, și anume pozitive. Pe de altă parte, dacă în locul curbei (C) am considera o altă curbă care să fie mai apropiată de punctele graficului empiric, adică de punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$, eroarea pătratică dată de (4.1.1) ar putea fi mai mică obținînd o aproximare mai bună a evoluției fenomenului.

Această observație ne sugerează că considerăm în locul curbei (C) o familie de curbe (C_α) descrisă analitic prin funcția $y=f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ în care $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sînt parametri reali, familie care acoperă graficul empiric. Vom selecta din această familie acea curbă care aproximează cel mai bine graficul empiric, luînd drept criteriu al gradului de aproximație (al acestui „cel mai bine"), condiția ca eroarea totală ε să fie minimă, adică:

$$\varepsilon=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2=\min \tag{4.1.2}$$

Selectarea unei curbe din familia (C_α), revine la determinarea unui sistem de valori $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots \alpha_m^0$ ale parametrilor, astfel încît să fie verificată relația. (4.1.2) Vom nota cu $y=f(x, \alpha_1^0 \alpha_2^0, \ldots, \alpha_m^0)$ curba $(C_{\alpha_0})\subset(C_\alpha)$. Deoarece:

$$\varepsilon_1=M_1'M_1=f(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)-y_1,$$

$$\varepsilon_2=M_2'M_2=f(x_2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)-y_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_n=M_n'M_n=f(x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)-y_n,$$

condiția (4.1.2) revine la a cere ca pentru $\alpha_i=\alpha_i^0$, $i=\overline{1, m}$, funcția:

$$\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)-y_i]^2$$

să aibă un minim în raport cu parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ considerați ca variabile independente.

După cum știm, această condiție este îndeplinită numai dacă constantele $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ constituie o soluție a siste-

Scanned with OKEN Scanner

mului de ecuații ce se obține prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale ale lui ε, în raport cu parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1}=0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_2}=0, \ldots, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_m}=0$$

Calculînd aceste derivate parțiale și simplificînd prin factorul 2, obținem sistemul de ecuații numit *sistem normal*:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)-y_i]\frac{f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)}{\partial \alpha_1}=0\\
&\sum_{i=1}^{n}[f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)-y_i]\frac{f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)}{\partial \alpha_2}=0 \qquad (4.1.3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n}[f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)-y_i]\frac{f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)}{\alpha_m}=0
\end{aligned}$$

Prin rezolvarea acestui sistem se obțin valorile $\alpha_1^0, x_2^0, \ldots, \alpha_m^0$ ca puncte staționare ale poblemei. Rămîne de arătat dacă într-adevăr pentru $\alpha_i=\alpha_i^0$, $i=\overline{1, m}$, eroarea totală ε are un minim. Aceasta s-ar putea verifica cu ajutorul condițiilor suficiente de extrem (Cap. 2. § 6) dar nu ne vom opri asupra acestei chestiuni.

Trebuie să reținem că toate considerațiile pe care le-am făcut pînă aici au presupus existența unei funcții de ajustare.

Dacă admitem că funcția f nu este numai continuă, dar și derivabilă pînă la un anumit ordin m și că însăși aceste derivate sînt continue, atunci conform observațiilor din cap. 2 ea poate fi aproximată printr-un polinom de grad m, adică:

$$f(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m, \quad a_i \in R$$

Determinarea funcției f revine la determinarea coeficienților acestui polinom, care joacă rolul parametrilor α_i de mai sus.

Să presupunem că numărul punctelor în care se cunosc valorile fenomenului studiat sînt în număr de n, acestea fiind reprezentate prin coordonatele lor :

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \ldots, \quad M_n(x_n, y_n)$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, sistemul (4.1.3) capătă forma

$$a_0 \sum_1^n x_i^{2m} + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{2m-1} + \ldots a_m \sum_1^n x_i^m = \sum_1^n x_i^m y_i$$

$$(4.1.4) \quad a_0 \sum_1^n x_i^{2m-1} + a_1 \sum_1^n x_i^{2m-2} + \ldots + \sum_1^n x_i^{m-1} = \sum_1^m x_i^{m-1} y_i$$

. . . . . .

$$a_0 \sum_1^n x_i^m + a_1 \sum_1^n x_i^{m-1} + \ldots + a_m \sum_1^n \Sigma x_i = \sum_1^n y_i$$

Rezolvînd acest sistem de $m+1$ necunoscute $a_0 \ldots, a_m$ și înlocuind valorile găsite, $a_0^0, a_1^0 \ldots, a_m^0$ obținem funcția de ajustare $y=f(x, a_0^0, a_1^0, \ldots, a_m^0)$.

Observație. O formă mai simplă a sistemului (4.1.4) se obține dacă efectuăm o redistribuire a valorilor x_i astfel încît sumele conținînd puterile impare ale noilor variabile x_i să fie egale cu zero. Aceasta se realizează prin translația convenabilă a originii axei Ox. Astfel, de exemplu, dacă se dau valorile.

$$x_1=1, \; x_2=2, \; x_3=3, \; x_4=4, \; x_5=5$$

și efectuăm substituția $x'=x-3$, vom obține

$$x_1'=-2, \; x_2'=-1, \; x_3'=0, \; x_5'=1, \; x_6'=2$$

și vom avea $\Sigma x_i'=0$, $\Sigma x_i'^3=0$, ș.a.m.d.
După rezolvarea sistemului în x_i' și obținerea funcției de ajustare, vom reveni la variabila x. În cazul de mai sus, vom înlocui pe x' cu $x=x'+3$.

În aplicații practice forma pe care trebuie să o aibă funcția de ajustare f este sugerată de însuși graficul empiric.

Astfel, dacă punctele graficului empiric se dispun aproximativ pe o dreaptă, vom alege ca funcție de ajustare o funcție liniară, dacă se dispun neliniar dar se pot așeza aproximativ pe o parabolă vom folosi o funcție de ajustare de grad doi, etc.

1.2. *Ajustare liniară.* În acest caz funcția de ajustare are forma :

$$y=a_0x+a_1$$

Scanned with OKEN Scanner

iar expresia care trebuie minimizată este:

$$F(a_0,\ a_1) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 x_i + a_1 - y_i)^2$$

Ecuațiile (4.1.4) capătă în acest caz forma :

$$(4.1.5) \qquad \begin{aligned} a_1 \sum_1^n x_i + a_0 \sum_1^n x_i^2 &= \sum_1^n x_i y_i \\ n a_1 + a_0 \sum_1^n x_i &= \sum_1^n y_i \end{aligned}$$

Calculele pot fi însă mai mult simplificate printr-o redistribuire a poziției punctelor x_i pe axa reală în cazul cînd ele sînt echidistante. În acest caz soluția sistemului (4.1.5) capăta forma :

$$a_1 = \frac{\sum_1^n y_i}{n}; \qquad a_0 = \frac{\sum_1^n x_i' y_i}{\sum_1^n x_i'^2}$$

Exemplu. Creșterea volumului desfacerilor pe o perioadă de patru ani A_1, A_2, A_3, A_4 la o bază de desfaceri este înfățișată în tabelul de mai jos :

Anii	Volum desfacere (mii lei)	Indice desfacere (%)
A_1	850,195	100,00
A_2	931,275	109,50
A_3	1 077 631	126,80
A_4	11 167 897	137,40

Graficul evoluției desfacerilor (fig. 4.1.3) luînd ca valori de referință indicele de desfacere sugerează o ajustare liniară a fenomenului. Deci, vom lua drept funcție de ajustare :

$$f(x,\ a_0, a_1) = a_0 x + a_1$$

În cazul nostru, $n = 4$, iar sistemul (4.1.5) capătă forma :

Scanned with OKEN Scanner

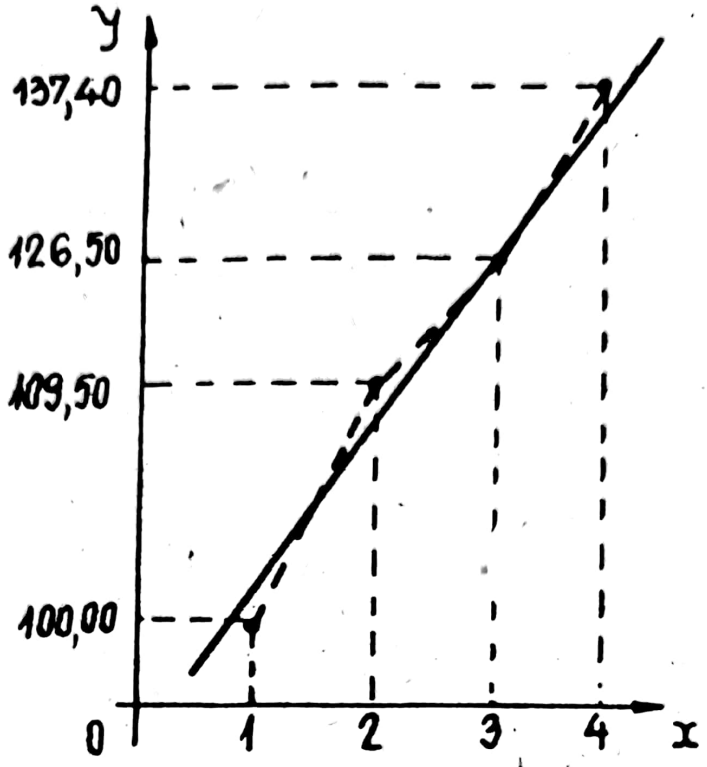


Fig. 4.1.3.

$$a_0 \sum_1^4 x_i^2 + a_1 \sum_1^4 x_i = \sum_1^4 x_i y_i$$

$$a_0 \sum_1^4 x_i + 4a_1 = \sum_1^4 y_i$$

Calculăm acum coeficienţii sistemului alcătuind tabelul

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
A_1	1	850 195	1	850 195
A_2	2	931 275	4	1 862 550
A_3	3	1 077 631	9	3 232 893
A_4	4	1 167 897	16	4 671 588

$$\sum_1^4 x_i = 10 \quad \sum_1^4 y_i = 4.026.999 \quad \sum_1^4 x_i^2 = 30 \quad \sum_1^4 x_i y_i = 10.617.226$$

Înlocuind în sistem coeficienţii $\sum_1^4 x_i$, $\sum_1^4 x_i^2$, $\sum_1^4 x_i y_i$ pe care i-am calculat în ultima linie a tabelului de mai sus, obţinem :

$$30a_0 + 10a_1 = 4\,046\,998$$
$$10a_0 + 4a_1 = 10\,617\,226$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici găsim :

$$a_0 = 109\ 946$$

$$a_1 = 731\ 884$$

Prin urmare, funcția de ajustare va avea expresia :

$$f(x) = 109\ 946x + 731\ 884$$

Unele concluzii. Ținînd seama că la un volum de desfaceri de 850 195 mii lei corespunde valoarea indicelui de desfacere de 100%, iar pentru $x=1$, din (4.1.5) rezultă $y=$ 841 830 căruia îi corespunde o valoare de 99,016 unități ale indicelui de desfacere. Dreapta de ajustare trece prin punctul de coordonare (1 ; 99,016) și are panta egală cu 12,8143, unități indice de desfacere.

Dreapta care ajustează fenomenul este reprezentată în fig. (4.1.3) prin linie plină.

1.3. *Ajustarea parabolică de ordin doi.*

În unele situații, ajustarea liniară nu ne conduce la o concluzie satisfăcătoare asupra comportării fenomenului studiat. În această situație se alege o formă mai complicată pentru funcția de ajustare. Dacă aceasta are forma unui polinom de grad doi se spune că ajustarea este *parabolică de grad doi.* Funcția de ajustare are în acest caz forma :

$$f(x,\ a_0,\ a_1,\ a_2) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

unde ca și în cazul precedent, coeficienții a_0, a_1, a_2 urmează a fi determinați, Ecuațiile corespunzătoare deduse din (4.1.4), pentru cazul $m=2$, vor fi :

$$\begin{cases} a_0 \sum_1^n x_i^4 + a_1 \sum_1^n x_i^3 + a_2 \sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n x_i^2 y_i \\ a_0 \sum_i^n x_i^3 + a_1 \sum_1^n x_i^2 + a_2 \sum_1^n x_i = \sum_1^n x_i y_i \\ a_0 \sum_1^n x_i^2 + a_1 \sum_1^n x_i + na_2 = \sum_1^n y_i \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Pentru calculul coeficienților sistemului, vom alcătui tabelul:

x_i	y_i	x^2	x^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
x_1	y_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	x_1y_1	$x_1^2y_1$
x_2	y_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	x_2y_2	$x_2^2y_2$
x_3	y_3	x	x_3^3	x_3^4	x_3y_3	$x_3^2y_3$
. . . . .						
x_n	y_n	x_n	x_n^3	x_n^4	x_ny_n	$x_n^2y_n$
$\sum_1^n x_i$	$\sum_1^n y_i$	$\sum_1^n x_i^2$	$\sum_1^n x_i^3$	$\sum_1^n x_i^4$	$\sum_1^n x_iy_i$	$\sum_1^n x_i^2y_i$

Pe ultima linie se citesc coeficienții sistemului. Aceștia se vor înlocui în sistem, după care, rezolvîndu-l, obținem a_0, a_1, a_n și apoi funcția de ajustare corespunzătoare. Evident, pentru simplificare calculelor, se poate efectua o redistribuire a valorilor x_i, astfel încît $\sum_1^n x_i = 0$ și $\sum_1^n x_1^3 = 0$.

Exemplu. Din literatura de specialitate se știe că randamentul unei guri de mină este proporțional cu lungimea abatajului. În tabelul de mai jos se indică valoarea randamentului (în m^3 — extracție) în funcție de lungimea abatajului exprimată în metri:

x [m]	55	65	75	85	95	105	115	125	135	126
y [m^3]	1,74	2,02	2,12	2,15	2,15	2,17	2,47	2,48	2,48	2,50

Se cere să se găsească o formulă care să exprime variația randamentului în funcție de lungimea abatajului și să se determine apoi care trebuie să fie lungimea unui abataj căruia îi corespunde randamentul maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Vom găsi mai întîi o ajustare care să răspundă primei părți a problemei. Totodată, pentru a simplifica forma ecuațiilor vom redistribui valorile x_i (ținînd seama că numărul lor este par și variază din 10 în 10) punînd $x'=1/5(x-100)$. Obținem astfel următoarea corespondență:

x'_i	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145
valori inițiale										
x_i	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9
valori redistribuite										

Să adoptăm, pentru descrierea dependenței randamentului de lungimea abatajului, o funcție de ajustare parabolică de grad doi

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$$

care ne este sugerată de forma graficului empiric, care are alura din fig. 4.1.4. unde au fost reprezentate numai punctele P_6-P_{10}.

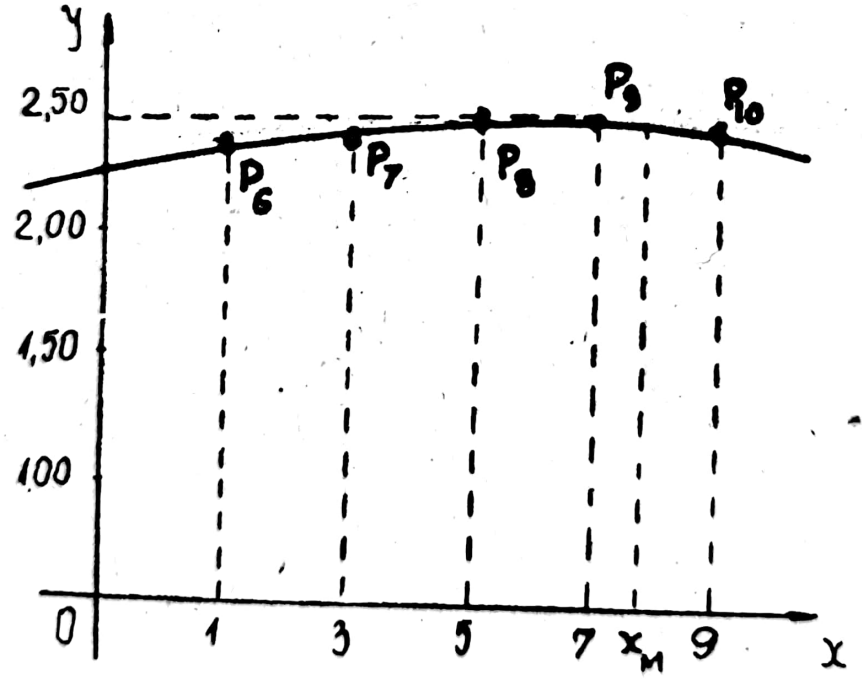


Fig. 4.1.4.

Alcătuim tabelul de calcul al coeficienților sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

x_i'	y_i		$(x_i')^2$	$(x_i')^4$	$x_i'y_i$	$(x_i')^2y^2$,	$(x_i')^3$
−9	1,74	81	81	6 561	−15,66	140,94	−729
−7	2,02		49	2 401	−14,14	98,98	−343
−5	2,12		25	625	−10,60	53,00	−125
−3	2,05		9	81	−6,15	18,45	−27
−1	2,17		1	1	−2,17	2,17	−1
1	2,47		1	1	+2,47	2,47	1
3	2,40		9	81	7,20	21,60	27
5	2,48		25	625	12,40	62,00	125
7	2,50		49	4 041	13,50	122,50	343
9	2,39		81	6 561	21,51	193,59	729
0	22,34		330	19 338	12,26	715,70	0

Folosind rezultatele de pe ultima linie, sistemul (4.1.6) devine :

$$330a_0 + 10a_2 = 22{,}34$$
$$330a_1 = 12{,}36$$
$$19{,}338a_0 + 330a_2 = 715{,}70$$

Soluția acestui sistem fiind :

$$a_0 = -0{,}0025, \qquad a_1 = 0{,}0375, \qquad a_2 = 2{,}317.$$

se obține pentru funcția de ajustare expresia

$$f(x) = -0{,}0025\ x'^2 + 0{,}0375x' + 2{,}3170$$

Graficul acestei funcții este reprezentat în fig. 4.1.4. prin linia continuă și exprimă variația randamentului la extracție în funcție de lungimea abatajului.

Să trecem acum la rezolvarea celei de a doua părți a problemei.

Valorile extreme ale funcției f care este un trinom de grad doi se realizează în punctul $x = 7{,}5$. Cum $y''(7{,}5) = -0{,}0050 < 0$, acest punct este efectiv un punct de maxim. Calculînd la scara inițială a valorilor lui x, vom obține

$$x_M = 5x' + 100 = 5{,}7 + 100 = 137{,}5$$

Deducem astfel că prin ajustarea efectuată, randamentul are valoare maximă atunci cînd lungimea abatajului este $l = 137{,}5$m

Această concluzie este în concordanță cu datele empirice din tabelul inițial care indică faptul că în jurul valorii $l=135$ m, pentru lungimea abatajului, volumul extracției este maxim (ceea ce a luat „a priori" ar putea fi un rezultat întîmplător)

Prin compararea graficului empiric cu cel al funcției de ajustare se observă că diferențele dintre ordonatele punctelor empirice și a celor obținute prin ajustarea parabolică pentru o abscisă dată nu sînt prea mari, ceea ce ne îndreptățește să tragem concluzia că fenomenul studiat poate fi descris analitic printr-o funcție de grad doi în variabila x.

1.4. *Ajustarea prin funcție exponențială.*

În unele probleme se poate observa că punctele graficului empiric se dispun astfel încît la variații, să spunem, proporționale ale variabilei independente x, valorile lui y cresc rapid (fig. 4.1.5) Încercînd o ajustare liniară sau una parabolică de grad doi vom constata că graficele funcțiilor de ajustare nu se adaptează suficient de bine graficului empiric.

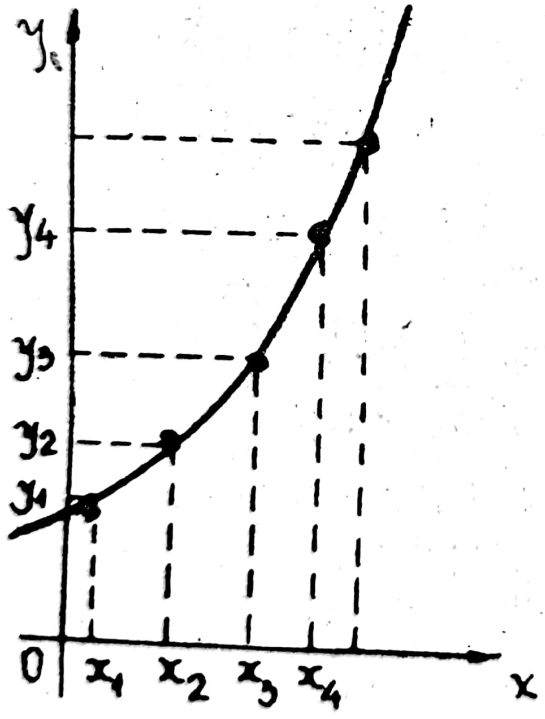


Fig. 4.1.5.

Vom încerca în acest caz ajustare prin funcția exponențială, adică cu o funcție de forma:

$$f(x,\ y,\ b)=ab^x \quad (a>0,\ b>0)$$

Parametrii ce trebuie determinați în acest caz sînt numerele a și b.

Vom presupune că valorile y_1 în punctele x_i sînt strict pozitive ($y_i>0$).

Este util în acest mod de ajustare să transformăm problema într-o problemă de ajustare liniară trecînd la logaritmi. Prin logaritmare (de exemplu, în baza e), obținem:

$$\ln f(x,\ a,\ b)=\ln a+x\ln b$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția ca suma abaterilor pătratice de la curba de ajustare (eroarea totală ε) în punctele x_i să fie minime, se exprimă acum sub forma:

$$\sum_{i=1}^{n} [\ln(x_i,\ a,\ b) - \ln y_i]^2 = \min.$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln a + x_i \ln b - \ln y_i)^2 = \min.$$

Calculînd derivatele parțiale ale acestei funcții, în raport cu parametrii a și b și egalînd cu zero aceste derivate se obține sistemul:

$$\frac{2}{a} \sum_{i=1}^{n} (\ln a + x_i \ln b - \ln y_i) = 0$$

$$\frac{2}{b} \sum_{i=1}^{n} (\ln a + x_i \ln b - \ln y_i) x_i = 0$$

După simplificări și rearanjarea termenilor, obținem ecuațiile:

$$n \ln a + \left(\sum_{1}^{n} x_i\right) \ln b = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

$$\left(\sum_{1}^{n} x_i\right) \ln a + \left(\sum_{1}^{n} x_i^2\right) \ln b = \sum_{1}^{n} \ln y_i$$

Efectuînd o redistribuire a valorilor x_i, astfel încît $\sum x_i' = 0$ soluția sistemului de mai sus se poate scrie sub forma:

$$\ln a = \frac{1}{n} \ln y_i,$$

$$\ln b = \frac{\sum_{1}^{n} x_i' \ln y_i}{\sum_{1}^{n} x_i'^2}$$

Constantele a și b se vor găsi apoi pri operația de exponențiere ($e^{\ln a} = a$, etc.). Astfel găsim:

Scanned with OKEN Scanner

$$a = e^{\frac{1}{n}\ln y_i}$$

$$b = e^{\frac{\sum_1^n x_i' \ln y_i}{\sum_1^n x_i'^2}}$$

Înlocuind aceste valori în expresia funcției f, obținem funcția de ajustare exponențială (desenată pe graficul din fig. 4.1.5 cu linie continuă)

Calculînd diferențele $\varepsilon_i = ab^{x_i} - y_i$, în fiecare punct x_i, vom putea evalua eroarea totală : $\varepsilon = \sum_1^n \varepsilon_i^2$.

§ 2. PROBLEMA INTERPOLĂRII

2.1. *Aspecte generale*

Să reluăm problema pusă în paragraful precedent dar sub o formă modificată, astfel :

Avînd graficul empiric, definit prin punctele discrete

$$M_1(x_1 y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$$

ne întrebăm dacă se poate determina o curnă (C) care să treacă, nu cît mai aproape de punctele graficului empiric ci chiar prin toate aceste puncte, deci $M_i \in (C)$

O problemă de acest tip se numește *problemă de interpolare,* iar funcția soluție (atunci cînd există), poartă numele de *funcție de interpolare.*

Evident că și în acest caz funcția al cărei grafic este curba (C) va reprezenta o aproximare a funcției (necunoscute) ce descrie evoluțoa fenomenului urmărit.

În fig. 4.2.1 am reprezentat graficul empiric, funcția teoretică după care se desfășoară fenomenul (dacă am admite că ea este cunoscută) și funcția de interporlare.

a) Punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ reprezintă graficul empiric ;

b) Curba continuă reprezintă legea după care evoluează fenomenul ;

Scanned with OKEN Scanner

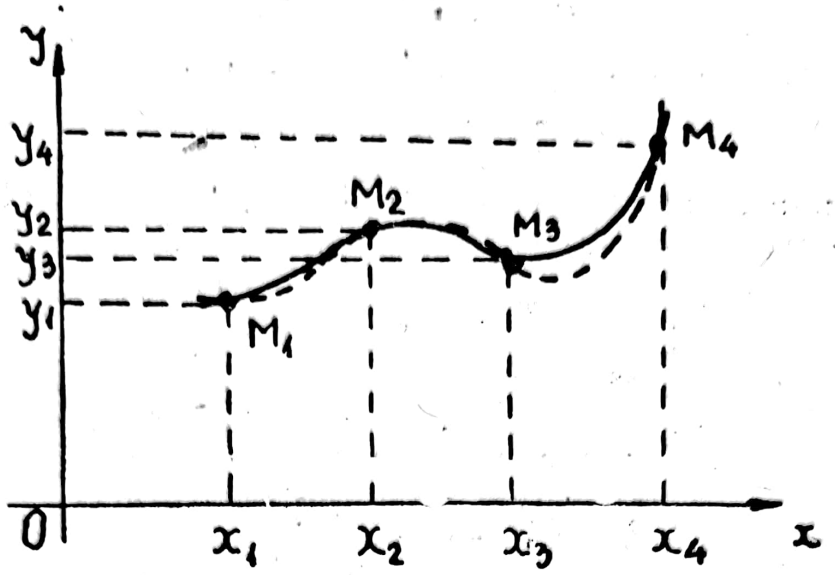


Fig. 4.2.1.

c) Curba punctată este graficul funcției de interpolare.

Mai întîi să observăm că soluția unei probleme de interolare poate să nu fie unică, deoarece prin cele n puncte M_1, M_2, ..., M_n pot trece o infinitate de curbe.

Să tratăm mai întîi un caz în care problema interpolării are totuși soluție unică.

– Să admitem că, din studiul fenomenului, am obținut suficiente informații care ne fac să formulăm ipoteza că funcția de descrie desfășurarea acestuia este polinomială de grad n dar cu coeficienți necunoscuți:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_n$$

Vom considera două cazuri:

Cazul I. În $n+1$ puncte distincte $(x_i\neq x_j)$ ale axei reale: x_0, x_1,..., x_n sînt cunoscute valorile funcției f, adică $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,\ n}$.

Vom demonstra că în acest caz, polinomul $f(x)$ este complet determinat, adică coeficienții a_0, a_1, ..., a_n pot fi găsiți în manieră unică.

Într-adevăr, exprimînd condițiile $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{1,\ n}$, ajungem la următorul sistem de ecuații liniare în necunoscutele a_0, a_1, ..., a_n:

$$a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\ldots a_n=y_0$$

Scanned with OKEN Scanner

(4.2.1)
$$a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots a_n=y_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0x_n^n+a_1x_n^{n-1}+\ldots a_n=y_n$$

Determinantul acestui sistem fiind un determinant de tip Vandermonde vom avea

$$D=\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1}\ldots x_0 & 1\\ x_1^n & x_1^{n-1}\ldots x_1 & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ x_n^n & x_n^{n-1}\ldots x_n & 1\end{vmatrix}=\prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

și, deoarece am presupus că $x_i\neq x_j$, acesta va fi diferit de zero. Deoarece în acest caz sistemul (4.2.1) este compatibil determinat, rezolvîndu-l, de exemplu prin regula lui Crameer, vom obține :

$$a_k=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_0^n\ldots x_0^{k+1} & y_0 & x_0^{k-1}\ldots x_0 & 1\\ x_0^n\ldots x_1^{k+1} & y_1 & x_1^{k-1}\ldots x_1 & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_n^n\ldots x_n^{k+1} & y_n & x_n^{k-1}\ldots x_n & 1\end{vmatrix},\ k=\overline{0,n}.$$

Acestea fiind singurele valori posibile pentru coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ polinomul $f(x)$ va fi unic determinat și, deci, prin punctele $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ va trece o singură curbă (C).

Cazul II. Să presupunem acum că se cunosc valorile funcției f într-un număr mai mic de puncte $x_0, x_1, \ldots, x_m$ $(m<n)$ ale axei reale. Procedînd ca mai sus, vom obține de această dată sistemul :

(4.2.2)
$$a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\ldots+a_n=y_1$$
$$a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_n=y_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0x_m^n+a_1x_m^{n-1}+\ldots a_n=y_m$$

*) Notația $\prod_{i=1}^{n} a_i$ semnifică produsul cantităților a_i, pentru $i=1, 2, \ldots, n$ adică $\prod_{i=1}^{n} a_i=a_1\cdot a_1\ldots a_n$.

În acest caz, sistemul (4.2.2) are mai puține ecuații decît necunoscute, iar dacă $x_i \neq x_j$, el va fi compatibil nedeterminat cu ∞^{n-m} soluții (soluția depinde de $n-m$ parametri arbitrari) Cum fiecărei soluții $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ îi corespunde un polinom $f(x)$, este evident că există ∞^{n-m} polinoame $f(x)$ care în punctele x_i iau valorile y_i. Prin urmare, în această situație, polinomul de interpolare nu este unic.

În teoria interpolării există mai multe metode de aproximare. În cele ce urmează, vom expune, fără a intra în amănunte, una dintre acestea.

2.2. *Metoda de interpolare a lui Lagrange.*

Fie $y=f(x)$ o funcție reală derivabilă de $n+1$ ori pe intervalul (a, b). Presupunem că în $n+1$ puncte $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in (a, b)$ numite *noduri* — se cunoscc $n+1$ valori ale funcției f, $y_0=f(x_0), \ldots, y_n=f(x_n)$.

Metoda de interpolare a lui Lagrange constă în aproximarea funcției f pe intervalul (a, b) cu un polinom de grad n $y=P_n(x)$ astfel încît în punctele x_i, $i=\overline{0, n}$ valorile polinomului $P_n(x)$ să coincidă cu acelea ale funcției f:

$$P_n(x_i)=f(x_i)$$

Putem deci scrie

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

O astfel de formulă se numește *formulă de interpolare*, iar R_n poartă numele de *rest* al formulei de interpolare; acesta dă o măsură a aproximării funcției $f(x)$ prin polinomul $P(x)$.

O formă pentru polinomul $P_n(x)$ este următoarea:

$$P_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}f(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots\ldots(x_1-x_n)}f(x_1)+ \tag{4.2.3.}$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}f(x_n)$$

Să observăm cum se formează acești termeni. La numărătorul fiecărui termen lipsesc în ordine diferențele $(x-x_0), \ldots$

Scanned with OKEN Scanner

$(x-x_n)$ în timp ce la numitor lipsesc diferențele care s-ar anula, adică (x_0-x_0), (x_1-x_1), ..., (x_n-x_n).

Expresia de mai sus poartă numele de *polinomul de interpolare al lui Lagrange.*

O altă formă a polinomului $P_n(x)$, se obține notînd

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

și, observînd că la numitorul fiecărei fracții apare derivata lui $\varphi(x)$ calculată în nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Vom putea deci scrie :

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)(x-x_i)}f(x_i)$$

Totodată se demonstrează că restul R_n poate fi exprimat sub forma restului Lagrange, adică

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)\,!}\varphi(x)$$

în care $a<\xi<b$, $x\in(a, b)$.

Funcția $f(x)$, dată de

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)(x-x_i)}f(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\varphi(x)$$

$$a<\xi<b$$

$$a<x<b$$

poartă numele de *formula de interpolare a lui Lagrange.*

Eroarea cu care se face aproximarea funcției $f(x)$ prin polinomul de interpolare $P_n(x)$ este dată de ordinul de mărime al restului R_n deoarece putem scrie

$$|f(x)-P(x)|=|R_n(x)|$$

Ea depinde de intervalul în care sînt plasate nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, cît și de forma funcției f. Nu ne propunem să facem un studiu al acestei probleme. Pentru detalii se poate consulta [3].

Exemplu. Să se determine polinomul de interpolare $P_3(x)$ care trece prin punctele :

$$M_0(-1,\ -1),\ M_1(0,\ 1),\ M_2(1,\ 3),\ M_3(2,\ 11)$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, și $f(x_0)=-1$, $f(x_1)=1$. $f(x_2)=3$, $f(x_3)=11$ în formula 4.2.3. obținem :

$$P_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)\,;$$

adică :

$$P_3(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1).(-2)\cdot(-3)}(-1)+\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)(-2)}(1)+$$

$$+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x+2)}{2\cdot1(-1)}(3)+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{3\cdot2\cdot1}(11)=$$

$$=x^3+x+1.\quad P_3(x)=x^3+x+1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5. *ECUAŢII DIFERENŢIALE*

§1. NOŢIUNI GENERALE

1.1. *Noţiunea de ecuaţie diferenţială.*

În diverse domenii ale matematicii aplicate se întîlnesc ecuaţii de un tip special numite ecuaţii diferenţiale ordinare O astfel de ecuaţie exprimă legătura dintre o variabilă independentă x, funcţia necunoscută $y(x)$ şi derivatele ei pînă la un anumit ordin. O ecuaţie diferenţială modelează din punct de vedere matematic un anumit fenomen (fizic, economic, etc.) în care $y(x)$ joacă rolul de parametru esenţial în desfăşurarea fenomenului.

Definiţia 5.1.1. Se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară* cu funcţia necunoscută $y: I \to R$, $I \subset R$ o relaţie de forma :

$$F[x,\ y(x),\ y^{(1)}(x),\ \ldots\ y^{(n)}(x)]=0. \tag{5.1.1}$$

unde F este privită ca fucţie de $n+2$ variabile într-un domeniu $D \subset R^{n+2}$ iar $y^{(k)}$, $k=\overline{0,\ n}$ este derivata de ordin k a funcţiei $y(x)$.

Numărul $n \in N$ care arată pînă la ce ordin de derivare apare funcţia y în ecuaţia (5.1.1) se numeşte *ordinul ecuaţiei*. Astfel, ecuaţia

$$y'+2y+1=0$$

este de ordinul întîi întrucît conţine prima derivată a funcţiei y. Ecuaţia

$$y''+xy'+2y=0$$

este de ordinul al doilea deoarece ordinul maxim al derivatei funcţiei y care apare în ecuaţie este doi.

Scanned with OKEN Scanner

În anumite condiții pentru funcția F, ecuația (5.1.1) se poate rezolva în raport cu derivata de ordin maxim $y^{(n)}(x)$ obținîndu-se forma echivalentă:

$$y^{(n)}=f[x,\ y(x),\ y^{(1)}(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)] \tag{5.1.2}$$

Această expresie poartă numele de *forma normală* a ecuației (5.1.1). În cazul particular $n=1$, ecuația (5.1.2) devine:

$$y'=f(x,\ y) \tag{5.1.3}$$

Definiția 5.1.2. Se numește *soluție* a ecuației diferențiale (5.1.1) (sau (5.1.2)), o funcție $\varphi: I\to R$ derivabilă pînă la ordinul n pe I și care satisface ecuația, adică

$$F[x,\ \varphi(x),\ \varphi^{(1)}(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)]=0$$

sau respectiv:

$$\varphi^{(n)}(x)=f[x,\ \varphi(x),\ \varphi^{(n)}_{(x)},\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}_{(x)}]$$

Curba $y=\varphi(x)$ soluție a ecuației (5.1.1) (sau (5.1.2)) se numește *curbă integrală* a ecuației respective.

1.2. *Tipuri de soluții.*

În cele ce urmează vom defini noțiunile de soluție generală (integrală generală) și soluție particulară (integrală particulară) pentru ecuația (5.1.1). Aceleași definiții sînt valabile și pentru ecuația (5.1.2).

Definiția 5.1.3. Se numește *soluție generală* sau *integrală generală* a ecuației (5.1.1) o familie de funcții derivabile de n ori pe intervalul $I\subset R$, care depinde de variabila x și n constante arbitrare $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$:

$$y=y(x,\ C_1,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$$

și care pentru orice sistem de valori date constantelor verifică identic ecuația dată.

Observăm că numărul constantelor arbitrare de care depinde soluția generală a unei ecuații diferențiale este egacu ordinul acelei ecuații.

Soluția generală a unei ecuații de ordinul întîi va conține o constantă, arbitrară, a unei ecuații de ordinul al doilea va conține două constante arbitrare, ș.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

În anumite condiții pentru funcția F, ecuația (5.1.1) se poate rezolva în raport cu derivata de ordin maxim $y^{(n)}(x)$ obținîndu-se forma echivalentă:

$$y^{(n)}=f[x,\ y(x),\ y^{(1)}(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)] \tag{5.1.2}$$

Această expresie poartă numele de *forma normală* a ecuației (5.1.1). În cazul particular $n=1$, ecuația (5.1.2) devine:

$$y'=f(x,\ y) \tag{5.1.3}$$

Definiția 5.1.2. Se numește *soluție* a ecuației diferențiale (5.1.1) (sau (5.1.2)), o funcție $\varphi: I\to R$ derivabilă pînă la ordinul n pe I și care satisface ecuația, adică

$$F[x,\ \varphi(x),\ \varphi^{(1)}(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)]=0$$

sau respectiv:

$$\varphi^{(n)}(x)=f[x,\ \varphi(x),\ \varphi^{(n)}_{(x)},\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}_{(x)}]$$

Curba $y=\varphi(x)$ soluție a ecuației (5.1.1) (sau (5.1.2)) se numește *curbă integrală* a ecuației respective.

1.2. *Tipuri de soluții.*

În cele ce urmează vom defini noțiunile de soluție generală (integrală generală) și soluție particulară (integrală particulară) pentru ecuația (5.1.1). Aceleași definiții sînt valabile și pentru ecuația (5.1.2).

Definiția 5.1.3. Se numește *soluție generală* sau *integrală generală* a ecuației (5.1.1) o familie de funcții derivabile de n ori pe intervalul $I\subset R$, care depinde de variabila x și n constante arbitrare $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$:

$$y=y(x,\ C_1,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$$

și care pentru orice sistem de valori date constantelor verifică identic ecuația dată.

Observăm că numărul constantelor arbitrare de care depinde soluția generală a unei ecuații diferențiale este egacu ordinul acelei ecuații.

Soluția generală a unei ecuații de ordinul întîi va conține o constantă, arbitrară, a unei ecuații de ordinul al doilea va conține două constante arbitrare, ș.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 5.1.4. Se numește *soluție particulară* a ecuației (5.1.1), funcția

$$y=y(x,\ C_1^0,\ C_2^0,\ldots,\ C_n^0)$$

în care C_k^0, $k=\overline{1,\ n}$ sînt obținute prin particularizarea constantelor C_k, $k=\overline{1,\ n}$.

Pentru determinarea unui sistem de constante C_k^0, care corespund unei soluții particulare, se impun soluției generale anumite condiții, numite *condiții inițiale.*

Aceste condiții cer ca pentru $x=x_0$, să aibă loc relațiile :

$$(5.1.4)\quad y(x_0)=y_0,\quad y^{(1)}(x_0)=y_0^{(1)},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

în care y_0, $y_0^{(1)}$, ..., $y_0^{(n-1)}$ sînt valori prescrise ce caracterizează fenomenul studiat.

Găsirea soluției ecuației (5.1.1) care satisface condițiile inițiale (5.1.4) poartă numele de *problema lui Cauchy.*

În teoria ecuațiillor diferențiale se demonstrează că în anumite ipoteze asupra funcției F soluția problemei lui Cauchy există și este unică.

§ 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI INTEGRABILE PRIN CUADRADURI

2.1. *Generalități.*

O problemă fundamentală care se pune etuuci cînd se dă o ecuație diferențială este *problema integrării.* Prin aceasta se înțelege stabilirea metodelor de găsire a mulțimii soluțiilor ei (a soluției generale sau a integralei generale). Una dintre aceste metode este metoda de integrare prin cuadraturi*).

Definiția 5.2.1. O ecuație diferențială se numește *integrabilă prin cuadraturi* dacă soluția generală a ei poate fi exprimată explicit cu ajutorul unui număr finit de integrale.

Să considerăm de exemplu, cazul în care funcția $f(x,y)$ din ecuația (5.1.3) nu depinde decît, de x, adică :

*) Termenul de cuadratură a fost folosit în antichitate pentru a desemna calculul ariei unei figuri, calcul care în epoca modernă a fost redus la o operație de integrare.

Scanned with OKEN Scanner

(5.2.1) $$y'=f(x)$$

în care $f: I\to R$, este o funcție continuă.

Scriind pe y' sub forma $y'=\frac{dy}{dx}$, ecuația devine:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

sau

$$dy=f(x)dx.$$

Integrînd ambii membri ai acestei relații, primul membru în raport cu y, iar cel de al doilea în raport cu x, obținem:

$$y(x)=\int f(x)dx+C$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației (5.2.1) se exprimă printr-o integrală și conține o constantă arbitrară.

În cele ce urmează vom pune în evidență o întreagă clasă de ecuații diferențiale de ordinul întîi care sînt integrabile prin cuadraturi sau care pot fi reduse la astfel de ecuații.

2.2. *Ecuații în care variabilele se separă.*

Dacă funcția $f(x, y)$ din (5.1.3) este de forma:

$$f(x, y)=A(x)B(y),\ B(y)\neq 0$$

în care $A(x)$ și $B(y)$ sînt funcții continue, se obține ecuația

(5.2.2) $$\frac{dy}{dx}=A(x)\,B(y)$$

Scriind

$$\frac{dy}{B(y)}=A(x)dx$$

constatăm că membrul întîi depinde numai de y, iar membrul al doilea numai de x. Spunem că cele două variabile s-au separat.

Integrînd ambii membri, obținem:

$$\int\frac{dy}{B(y)}=\int A(x)dx+C$$

Scanned with OKEN Scanner

după calcularea celor două integrale, vom obține :

$$F(y)=G(x)+C$$

În condițiile în care din această relație se poate scoate y ca funcție de x, se obține soluția generală a ecuației (5.2.2) sub forma

$$y=y(x, C).$$

Exemplu 1. Fie ecuația

$$y'=\frac{xy}{x^2+1},\ y>0$$

Avem $A(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $B(y)=y$. Separînd variabilele, vom obține :

$$\frac{dy}{y}=\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

sau integrînd

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+C_1$$

Pentru a da rezultatului o formă adecvată pentru calcul, vom pune constanta C_1 sub forma $C_1=\ln C$ $(C>0)$. Obținem astfel :

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln C$$

De aici, aplicînd proprietățile logaritmilor, vom avea :

$$y=C\sqrt{x^2+1}$$

care reprezintă soluția generală (integrala generală) a ecuație considerate.

Exemplul 2. Se cere să se afle y ca funcție de x, știind că elasticitatea lui y în raport cu x este constantă și egală cu α.

Elasticitatea unei mărimi a fost studiată în Cap. 2, § 4. și este dată de :

$$E(y)=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $E(y)=\alpha$, atunci trebuie să avem:

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\alpha$$

adică

$$\frac{dy}{y}=\alpha\frac{dx}{x}$$

Integrînd obținem:

$$\ln y=\alpha\ln x+\ln C$$

sau

$$\ln\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)=\ln C$$

De aici rezultă că funcția y cu proprietatea din enunț este:

$$y=Cx^{\alpha}$$

2.3. *Ecuații omogene.*

În cazul cînd $f(x, y)$ este o funcție omogenă de raportul $\frac{y}{x}$, ecuația de forma:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3.2}$$

poartă numele de *ecuație diferențială omogenă.* Spre exemplu, dacă

$$f(x, y)=\frac{b(x, y)}{h(x, y)}$$

iar funcțiile g și h sînt omogene de grad m, conform proprietății funcțiilor omogene (Cap. 2 §), vom avea:

$$\frac{g(tx, ty)}{h(tx, ty)}=\frac{t^m g(x, y)}{t^m h(x, y)}=\frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

sau:

$$\frac{g(x, y)}{h(x, y)}=\frac{g\left(1, \frac{y}{x}\right)}{h\left(1, \frac{y}{x}\right)}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Definind funcția $u(x)$ prin relația $u(x)=\frac{y}{x}$, și luînd-o drept funcție necunoscută, vom avea: $y=xu(x)$, de unde:

$$y'=xu'+u$$

Astfel, ecuația (5.3.3) devine

$$xu'+u=f(u)$$

sau

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u$$

Presupunînd că $f(u)-u\neq 0$ și separînd variabilele, se obține

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C_1$$

adică

$$\ln x=\int\frac{du}{f(u)-u}-\ln C,\quad (C_1=-\ln C)$$

Rezultă:

(5.2.4)
$$x=Ce^{\int\frac{du}{f(u)-u}}$$

relație care dă pe x ca funcție de u. Ținînd seama de substituția $y=xu(x)$, obținem pe y sub forma

(5.2.5)
$$y=Cu\,e^{\int\frac{du}{f(u)-u}}$$

Relațiile (5.2.4) și (5.2.5) ne dau pe x și y ca funcție de parametrul u și constanta C.

Exemplu. Să se găsească integrala generală a ecuației:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2},\qquad x^2\neq y^2$$

Efectuăm substituția $y=xu(x)$ și va rezulta

$$xu'+u=\frac{2u}{1-u^2}$$

dé unde:

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}-u=u\frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)}=\frac{dx}{x}$$

Integrînd ambii termeni vom găsi:

$$-\ln(1+u^2)+\ln|u|=\ln|x|-\ln\ C\ ;(C>0)$$

Restrîngînd logaritmii, avem

$$\ln\frac{|u|}{1+u^2}=\ln\left|\frac{x}{C}\right|$$

sau

$$\frac{|u|}{1+u^2}=\frac{|x|}{C}$$

Ţinînd seama că $u=y/x$, va rezulta:

$$\frac{|y|}{x^2+y^2}=\frac{1}{C}$$

de unde se obţine soluţia generală sub formă implicită

$$x^2+y^2=C|y|$$

Se poate vedea uşor că aceste soluţii se reprezintă în planul xOy printr-o dublă familie de cercuri tangente axei Ox avînd centrele pe axa Oy de coordonate $(O,\ C)$ şi $(O,\ -C)$ cu C arbitrar şi pozitiv.

2.4. *Ecuaţii liniare.*

Aceste ecuaţii au forma:

$$y'+P(x)\ y+Q(x)=0 \tag{5.2.6}$$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt funcţii continue pe domeniile lor de existenţă.

Fie $y_1(x)$ o soluţie particulară a ecuaţiei (5.2.6) Aceasta înseamnă că funcţa $y_1(x)$ verifică relaţia:

$$y_1'+P(x)y_1+Q(x)=0 \tag{5.2.7}$$

Scăzînd (5.2.7) din (5.2.6), şi notînd

Scanned with OKEN Scanner

(5.2.8) $$Y = y - y_1$$

observăm că funcţia $Y(x)$ trebuie să verifice ecuaţia :

(5.2.9) $$Y' + P(x)Y = 0$$

în care $Q(x)$ nu mai apare.

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia omogenă* corespunzătoare ecuaţiei (5.2.6)

Cum ecuaţia (5.2.9) este cu variabile separabile, se poate scrie :

$$\frac{dY}{Y} = -P(x)dx$$

De aici, prin integrare, se obţine

$$\ln Y = -\int P(x)dx + \ln C_1$$

sau

(5.2.10) $$Y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Am obţinut astfel soluţia generală a ecuaţiei omogene. Ţinînd seama de (5.2.8), dacă funcţia Y este cunoscută, atunci:

$$y = Y + y_1$$

Urmează acum să dererminăm soluţia particulară y_1. Pentru găsirea acestei soluţii vom utiliza o metodă numită *metoda variaţiei constantei*, datorată lui Lagrange.

Această metodă constă în a căuta o soluţie particulară a ecuaţiei (5.2.8) sub forma

(5.2.11) $$y_1^{(x)} = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

dedusă din (5.2.10) în care constanta C a fost înlocuită cu funcţia necunoscută $C(x)$.

Punînd condiţia ca y_1 să fie soluţie a ecuaţiei (5.2.6) se obţine

$$C'(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x) = 0$$

sau

$$C'(x) = -Q(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Prin integrare, se obţine:

Scanned with OKEN Scanner

$$C(x) = -\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Înlocuind pe $C(x)$ în (5.2.10), găsim :

$$y_1(x) = -e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{5.2.12}$$

În final, ținînd seama de (5.2.10) și 5.2.11), soluția generală a ecuației (5.2.6) se va scrie sub forma :

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] \tag{5.2.13}$$

unde C este o constantă arbitrară. Observăm că integrarea unei ecuații liniare revine la efectuarea a două cuadraturi.

Exemplul. 1. Să se găsească soluția generală a ecuației

$$xy' - 2y + x = 0, \qquad x \neq 0$$

și să se determine acea soluție, care satisface condiția :

$$y(1) = 3.$$

Împărțind ecuația prin x, obținem :

$$y' - \frac{2}{x} + 1 = 0$$

Deci $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = 1$ și soluția generală calculată cu formula (5.2.12) va fi dată de :

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[C - \int e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx\right]$$

Efectuînd calculele, găsim

$$y(x) = x + Cx^2$$

Partea a doua a problemei din enunț cere determinarea acelei soluții, care satisface condiția $y(1) = 3$ sau a acelei curbe integrale care trece prin punctul $P_0(1, 3)$. Va trebui deci să determinăm constanta C. Impunem condiția: $y(1) = 3$ și găsim:

$$y(1) = 1 + C = 3$$

Prin urmare :

$$C = 2$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, soluţia problemei lui Cauchy pusă mai sus este

$$y(x)=x+2x^2$$

Exemplul 2. Să se integreze ecuaţia:

$$y'=\frac{xy}{x^2-2}-x=0, \text{ în care } |x|>\sqrt{2}$$

Avem:

$P(x)=-\frac{x}{x^2-2}$, $Q(x)=-x$. Vom rezolva mai întîi ecuaţia omogenă:

$$Y'-\frac{xY}{x^2-2}=0$$

Soluţia acestei ecuaţii (cu variabile separabile) este:

$$Y=C\sqrt{x^2-2}$$

Vom căuta apoi soluţia generală a ecuaţiei date prin metoda variaţiei constantei. Soluţia particulară y_1 va avea forma:

$$Y_1=C(x)\sqrt{x^2-2}$$

Din condiţia ca $y_1(x)$ să verifice ecuaţia dată, se obţine:

$$C'(x)\sqrt{x^2-2}-x=0$$

Rezultă

$$C'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

şi de aici, prin integrare, găsim:

$$C(x)=\sqrt{x^2-2}$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei din enunţ va fi:

$$y=y_1+Y=x^2-2+C\sqrt{x^2-2}$$

2.5. *Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii de ordinul întîi liniare.*

În cele ce urmează, vom considera o categorie de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi care, prin substituţii convenabile,

Scanned with OKEN Scanner

se reduc la ecuații liniare. Dintre acestea, ne vom opri numai asupra următoarelor ecuații:

1. *Ecuații de tip Bernoulli.* Aceste ecuații sînt de forma

$$y'+P(x)y+Q(x)y^n=0,\quad n\neq 0,\quad n\neq 1 \tag{5.2.14}$$

Pentru rezolvare, se împarte mai întîi ecuația prin y^n și apoi se notează $y^{1-n}=z$. După efectuarea calculelor, se obține o ecuație liniară în z.

Exemplu. Fie ecuația $y'-2xy-x^3\sqrt{y}=0.\ y>0.$

Avem $n=1/2$ și efectuăm substituția $y^{1-\frac{1}{2}}=z$ adică $\sqrt{y}=z$.

Rezultă:

$$y'=2\sqrt{y}\,z'=2zz'$$

și ecuația în z va fi

$$z'-xz-\frac{x^3}{2}=0.$$

Aplicînd formula de integrare (5.2.13), obținem

$$z(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^2-2}{2}$$

Cum, în baza substituției făcute avem $y=z^2$, rezultă că soluția generală a ecuației considerate va fi dată de:

$$y(x)=\left(Ce^{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^2+2}{2}\right)^2$$

2. *Ecuații de tip Riccati.* Ecuațiile de forma:

$$y'+P(x)y+Q(x)y^2+R(x)=0 \tag{5.2.15}$$

unde $R(x)\neq 0$, se numesc ecuații Riccati. În general, aceste ecuații nu pot fi reduse la cuadraturi decît în anumite cazuri. Unul dintre acestea este cazul în care se cunoaște o soluție particulară y_1 a ecuației date, adică:

$$y_1'+P(x)y_1+Q(x)y_1'+R(x)=0$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd apoi :

$$y = y_1 + Y$$

în ecuaţia (5.2.15), se constată că funcţia $Y(x)$ trebuie să fie soluţie a ecuaţiei Bernoulli de tip (5.2.15) cu $n=2$:

(5.2.16) $\quad Y' + P_1(x)Y + Q(x)Y^2 = 0 ; \quad P_1(x) = P(x) + 2y_1$

Vom efectua deci substituţia $Y^{1-2} = z$, adică $Y^{-1} = z$. Punînd

$$y = y_1 + \frac{1}{z},$$

ecuaţia (5.2.16) se transformă într-o ecuaţie liniară în z. Un alt caz în care ecuaţia (5.2.15) se integrează imediat reducîndu-se la cuadraturi este acela cînd coeficienţii $P(x)$, $Q(x)$ şi $R(x)$ sînt constante.

§ 3. ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL AL DOILEA

3.1. *Ecuaţii reductibile la ecuaţii de ordinul întîi.*

Ecuaţiile de ordinul al doilea sînt cazuri particulare ale ecuaţiilor (5.1.1) sau (5.1.2) pentru $n=2$.

În cele ce urmează, vom studia cîteva tipuri de ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea care se pot reduce la ecuaţii de ordinul întîi sau la cuadraturi.

3.1.a. Considerăm ecuaţia

(5.3.1) $$y'' = f(x)$$

în care $f(x)$ este o funcţie continuă dată. Integrînd o dată, obţinem :

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

Aceasta este o ecuaţie de ordinul unu de forma (5.2.1).

Procedînd în cotinuare la o nouă integrare, vom găsi

$$y(x)=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare.

Constatăm deci că soluția generală a ecuației (5.3.1) depinde de două constante arbitrare, situație pe care o vom întîlni și în cazul general al ecuațiilor de ordinul al doilea.

Exemplu. Să se găsească integrala generală a ecuației

(5.3.2) $$y''=a^{ax},\ a\in R.$$

O primă integrare ne dă

(5.3.3) $$y'=\frac{1}{a}e^{ax}+C_1$$

Apoi, integrînd din nou, vom obține:

(5.3.4) $$y=\frac{1}{a^2}e^{ax}+C_1x+C_2$$

Aceasta este soluția generală a ecuației (5.3.2). O problemă Cauchy pentru această ecuație ar cere determinarea acelei soluții a ecuației (5.3.2) care satisface, de exemplu, condițiile:

(5.3.5) $$y(0)=1,\ y'(0)=a.$$

Punînd $x=0$ în (5.3.4) avem

$$\frac{1}{a^2}+C_2=1$$

iar din (5.3.3), găsim

$$a=\frac{1}{a^2}+C_1$$

Din aceste două ecuații algebrice, obținem

$$C=-a^3,\quad C_2=1-\frac{1}{a^2}$$

Deci, soluția care corespunde condițiilor inițiale (5.3.5) este

Scanned with OKEN Scanner

$$y=\frac{1}{a^2}e^{ax}-a^3x+\left(1-\frac{1}{a^2}\right).$$

3.1.b. Fie ecuația

(5.3.6) $$F(x,y',y'')=0$$

în care nu apare funcția necunoscută y.

Notînd $y'=u$, ecuația de mai sus devine:

$$F(x,u,u')=0$$

Aceasta este o ecuație de ordinul întîi. Dacă o putem integra, soluția generală a ei va fi de forma $u=u(x, C)$. În continuare, ținînd seama că $u=y'$, vom obține

$$y(x)=\int u(x,C)dx+C_1$$

care este și soluție generală a ecuației (5.3.6).

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

(5.3.7) $$y''-\frac{2}{x}y'+1=0$$

Notăm $y'=u$ și ecuația în u corespunzătoare se scrie:

$$u'-\frac{2}{x}u+1=0$$

Soluția acestei ecuații a fost găsită în exemplul 1 (punctul 4.3) și anume:

$$u(x)=x+C_1x^2$$

în care C_1 este o constantă arbitrară.

Cum $y'=u$, avem:

$$y'=x+C_1x^2$$

și soluția generală a ecuației (5.3.7) se va scrie sub forma:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+C_1\frac{x^3}{3}+C_2$$

Scanned with OKEN Scanner

3.1.c. Considerăm cum ecuația

(5.3.8) $$F(y, y', y'') = 0$$

care, de această dată, nu conține variabila independentă x. În acest caz, dacă luăm ca funcție necunoscută $u = y'$ și considerăm pe y drept variabilă independentă, vom avea:

$$y' = u, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u$$

Ecuația (5.3.8) se transformă în

$$F\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right) = 0$$

care, este o ecuație diferențială de ordinul întîi.

Dacă $u = u(y, C)$ este soluția generală a ei din relația, $y' = u$, scoatem:

$$dy = u(y, C)dx$$

și se obține o ecuație cu variabile separabile. Vom găsi de aici prin integrare

$$x = \int \frac{dy}{u(y, C)} + C'$$

unde C și C' sînt constante arbitrare.

După efectuarea calculelor, vom obține:

$$x = h(y, C, C')$$

pe care rezolvînd-o în raport cu y (atunci cînd se poate), vom obține o soluție generală a ecuației (5.3.8)

$$y = y(x, C, C').$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

(5.3.9) $$y'' - \frac{2yy'^2}{1+y^2} = 0$$

Notînd $y' = u$, și luînd pe y ca variabilă independentă, vom avea

Scanned with OKEN Scanner

$$y''=u\frac{du}{dy}$$

și ecuația (5.3.9) devine :

$$u\frac{du}{dy}+\frac{2yu^2}{1+u^2}=0$$

După simplificare cu u și separarea variabilelor u și y, se obține :

$$\frac{du}{u}=-\frac{2ydy}{1+y^2}.$$

De aici prin integrare găsim :

$$u=\frac{C_1}{1+y^2}$$

Revenind la substituția făcută, vom avea :

$$y'=\frac{C_1}{1+y^2}$$

adică :

$$(1+y^2)dy=C_1dx$$

Prin integrare se obține

$$y+\frac{y^3}{3}=C_1x+C_2$$

care reprezintă soluția generală a ecuației (5.3.9) scrisă sub formă implicită.

3.2. *Ecuații diferențiale de ordinul al doilea cu coeficienți constanți.*

Forma sub care se prezintă aceste ecuații este.

(5.3.10) $$y''+ay'+by=f(x)$$

în care a, b sînt constante reale iar $f(x)$ o funcție dată. Dacă

Scanned with OKEN Scanner

$y_1(x)$ este o soluție particulară a ecuației (5.3.10) adică are loc relația :

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 = f(x) \tag{5.3.11}$$

atunci, scăzînd (5.3.11) din 5.3.10) și notînd :

$$Y = y - y_1$$

vom deduce că funcția $Y(x)$ trebuie să satisfacă ecuația omogenă (fără membrul drept), atașată ecuației (5.3.10) și anume :

$$Y'' + aY' + bY = 0 \tag{5.3.12}$$

Înainte de a trece la rezolvarea acestel ecuații vom menționa fără demonstrație, următoarea teoremă

Teorema 5.3.1. Dacă $Y_1(x)$ și $Y_2(x)$ sînt două soluții ale ecuației

$$Y'' + aY' + bY = 0$$

astfel încît determinantul

$$\begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.3.13}$$

atunci soluția generală a ei este dată de

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$$

în care C_1 și C_2 sînt constante arbitrare.
Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [3]

Observație. Două soluții Y_1, Y_2 care satisfac condiția (5.3.13) se numesc liniar independente.

Să notăm acum cu $F(Y)$ primul membru al ecuației (5.3.12) Putem scrie :

$$F(Y) = Y'' + aY' + bY = 0.$$

Vom căuta pentru această ecuație soluții particulare de forma $Y = e^{\lambda x}$, λ fiind o constantă ce urmează a fi determinată.

Înlocuind în (5.3.12) pe Y cu $e^{\lambda x}$, obținem :

$$F(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $e^{\lambda x} \neq 0$, rezultă că egalitatea de mai sus va fi satisfăcută numai dacă :

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{5.3.14}$$

Această ecuație de gradul al doilea în λ poartă numele de *ecuație caracteristică* atașată ecuației (5.3.12).

Vom examina trei cazuri :

3.2.*a*. Ecuația $P(\lambda)=0$ admite rădăcinile reale distincte λ_1 și λ_2. Atunci avem două soluții : $Y_1 = e^{\lambda_1 x}$ și $Y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Se constată că determinantul (5.3.13) format cu aceste soluții :

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Prin urmare aceste două soluții sînt liniar independente și în virtutea teoremei 5.3.1, soluția generală a ecuației (5.3.12) va fi dată de :

$$Y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

cu C_1, C_2 — constante arbitrare.

Exemplu. Să se găsească integrala generală a ecuației:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Vom scrie mai întîi ecuația caracteristică (5.3.14), adică :

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Se observă cu ușurință că rădăcinile acestei ecuații sînt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, și, prin urmare, soluția generală a ecuației scrise este :

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

3.2.b. Ecuația $P(\lambda)=0$ admite o rădăcină dublă, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. O soluție particulară care corespunde acestei rădăcini este $Y_1 = e^{\lambda x}$. Vom căuta încă o soluție particulară Y_2 a ecuației (5.3.12) pe care o vom alege de forma :

$$Y_2(x) = Y_1(x) u(x) = e^{\lambda x} u(x)$$

Punînd condiția ca Y_2 să verifice (5.3.12) obținem condiția :

Scanned with OKEN Scanner

$$F(e^{\lambda x}u)=e^{\lambda x}[u''+(2\lambda+a)u'+(\lambda^2+a\lambda+b)u]=0$$

Dar, $\lambda^2+a\lambda+b=0$ și, în plus, $\lambda=-a/2$ deoarece λ este rădăcină dublă. Coeficientul $2\lambda+a=0$ fiind egal cu zero, urmează

$$u''(x)=0$$

Cum o soluție particulară a acestei ecuații este $u(x)=x$, vom obține pentru $Y_2(x)$ expresia

$$Y_2=xe^{\lambda x}$$

Din nou putem verifica că Y_1 și Y_2 sînt soluții particulare liniar independente calculînd determinantul (5.3.13). În baza aceleiași teoreme 4.3.1. rezultă că, în acest caz, soluția generală a ecuației (5.3.12) va fi dată de:

$$Y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda}$$

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$y''+4y'+4y=0$$

Ecuația caracteristică coresăunzătoare este

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

și admite rădăcina dublă $\lambda=-2$. Deci soluția generală a ecuației din enunț va fi

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

3.2.c. Ecuația $P(\lambda)=0$ admite rădăcini complexe conjugate:

$$\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta,\ i=\sqrt{-1}.$$

Din nou obținem două soluții: $Y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ și $Y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$. Folosind formulele lui Euler

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$$

vom putea scrie

$$Y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$Y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece ecuația (5.3.11) este omogenă, funcția

$$Y(x)=A_1Y_1+A_2Y_2$$

în care A_1 și A_2 sînt constante complexe arbitrare este de asemenea o soluție, întrucît:

$$F(Y)=F(A_1Y_1+A_2Y_2)=A_1F(Y_1)+A_2F(Y_2)=0$$

(Am folosit aici proprietatea de liniaritate a operatorului $F(Y)$ ceea ce ne arată că $Y(x)$ este și ea soluție a ecuației (5.3.12)).

Notînd:

$$A_1+A_2=C_1 \text{ și } A_1-A_2=\frac{C_2}{i},$$

vom obține soluția generală a ecuației (5.3.12) sub forma

$$Y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Exemplu. Să se găsească soluția generală a ecuației:

$$y''+4y'+13y=0$$

Scriind ecuația caracteristică corespunzătoare:

$$\lambda^2+4\lambda+13=0$$

și rezolvînd-o, găsim rădăcinile

$$\lambda_1=-2+3i, \qquad \lambda_2=-2-3i.$$

Conform celor de mai sus, va rezulta că soluția generală a ecuației din enunț este

$$y(x)=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

3.3. *Ecuații de ordinul al doilea cu coeficienți constanți neomogene (cu membrul drept, o funcție dată)*

Ne-am ocupat pînă aici de rezolvarea ecuației omogene asociată ecuației (5.3.10) în ipoteza că se cunoaște o soluție particulară $y_1(x)$ a acesteia. În acest caz, dacă $Y=Y(x, C_1, C_2)$ este soluția generală a ecuației omogene (5.3.12), soluția generală a ecuației (5.3.10) va fi dată de:

$$y(x)=y_1(x)+Y(x,C_1,C_2)$$

Soluția particulară poate fi determinată prin metoda variației constantlor așa cum am folosit-o în § 3, punctul 2.4 sau pe cale directă atunci cînd funcția $f(x)$ din membrul al, doilea al ecuației (5.3.10) are o anumită formă. Astfel, dacă :

3.3.a. $f(x)=k$, $k=$const. Soluția particulară y_1 se va căuta tot sub forma unei constante:

$$y_1(x)=A,$$

în care A urmează a fi determinată.

Punînd condiția ca $y_1(x)$ să verifice (5.3.10), vom găsi :

$$bA=k$$

de unde

$$A=\frac{k}{b}$$

și deci soluția generală a ecuației (5.3.10) va fi :

$$y(x)=\frac{k}{b}+Y(x,\ C_1,\ C_2)$$

3.3.b. $f(x)=ke^{\mu x}$, k și μ — constante. Soluția particulară se va alege de forma

$$y_1=Be^{\mu x}$$

urmînd a determina constanta B. Introducînd în (5.3.10) obținem :

$$F(Be^{\mu x})=B(\mu^2+a\mu+b)e^{\mu x}=ke^{\mu x}$$

Aici putem pune în evidență mai multe cazuri, și anume :

1. Dacă μ nu este rădăciă a ecuației caracteristice $P(\mu)=0$, adică $\mu^2+a\mu+b\neq 0$, constanta B este determinată prin formula :

$$B=\frac{k}{\mu^2+a\mu+b}$$

2. Dacă μ este una dintre rădăcinile *simple* ale ecuației caracteristice, soluția particulară y_1 se alege sub forma:

$$y_1(x)=Bxe^{\mu x}.$$

Din condiția ca

$$F(Bxe^{\mu x})=0$$

și $2\mu+a\neq 0$, (deoarece μ este rădăcina simplă), urmează:

$$B=\frac{k}{2\mu+a}$$

3. Dacă constanta μ coincide cu rădăcina dublă a ecuației caracteristice, soluția particulară $y_1(x)$ se caută de forma:

$$y_1=Bx^2e^{\mu x}$$

și se găsește:

$$B=\frac{k}{2}$$

3.3.c. $f(x)=A\sin kx+B\cos kx$. A, B, C — constante cunoscute. În acest caz, soluția particulară va fi de forma:

$$y_1(x)=Mx\sin kx+Nx\cos kx$$

cu M și N constante nedeterminate.

Din condiția ca $y_1(x)$ să verifice ecuația (5.3.10)

$$F(y_1)=A\sin kx+B\cos kx$$

și identificarea coeficienților funcțiilor sin kx și coskx din cei doi membri ai ecuației se va obține un sistem din care se determină necunoscutele M și N în funcție de constantele A, B și k.

§. 4. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL n CU COEFICIENȚII CONSTANȚI

4.1. Considerații generale.

Vom considera acum cazul mai general în care ecuația diferențială are forma:

(5.4.1) $$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $y^{(k)}(x)$, $k=\overline{0,\ n}$ sînt derivatele de ordin k ale funcției necunoscute, a_j, $j=\overline{1,\ n}$ sînt constante iar $f(x)$ este o funcție cunoscută.

Procedînd ca în § 3 se poate arăta că dacă se cunoaște o soluție particulară $y_1(x)$ a ecuației (5.4.1), soluția generală a ei se scrie sub forma :

$$y(x)=y_1(x)+Y(x)$$

unde $Y(x)$ este soluția generală a ecuației omogene

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0. \tag{5.4.2}$$

De asemenea, se poate arăta, în condiții similare acelora din teorema (5.3.1), că dacă $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ sînt n soluții particulare liniar independente, soluția generală a ecuației (5.4.2) va fi o combinație liniară a acestora, adică va avea forma :

$$Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n$$

în care C_k, $k=\overline{1,\ n}$ sînt constante arbitrare.

4.2. *Soluția generală a unei ecuații de ordin n.*

Pentru a determina un sistem de soluții particulare ale ecuației (5.4.2) vom proceda ca și în cazul ecuațiilor de ordinul al doilea, încercînd să satisfacem această ecuație cu soluții de forma $y=e^{\lambda x}$. Obținem astfel ecuația :

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{5.4.3}$$

care se numește (ca și în cazul ecuațiilor de ordinul al doilea) *ecuația caracteristică* atașată ecuației (5.4.2)

Dacă ecuația (5.4.3) admite n rădăcini distincte : λ_1, λ_2, ..., λ_n, atunci soluțiile

$$y_1(x)=e^{\lambda_1x},\quad x_2(x)=e^{\lambda_2x},\ \ldots,\quad y_n(x)=e^{\lambda_nx}$$

constituie un sistem de soluții particulare ale ecuației (5.4.2) Soluția generală a ecuației (5.4.1) va fi atunci dată de

$$y(x)=y_1(x)+C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\ldots+C_ne^{\lambda_nx}$$

cu C_k, $k=\overline{1,\ n}$ constante arbitrare.

Scanned with OKEN Scanner

Ca și în cazul ecuațiilor de ordinul al doilea, se poate face o discuție asupra formei pe care o au soluțiile particulare ale ecuației (5.4.2) în cazul cînd ecuația caracteristică (5.4.3) are rădăcini reale multiple sau rădăcini complexe.

Exemplu. Să se găsească soluția generală a ecuației

$$y^{(3)}+2y^{(2)}-5y^{(2)}-6y=e^x \tag{5.4.4}$$

Căutăm mai întîi o soluție particulară a acestei ecuații de forma :

$$y_1(x)=Ae^x$$

Înlocuind în (5.4.4) și simplificînd cu e^x, găsim :

$$A=-\frac{1}{8}$$

Soluție particulară este, deci :

$$y_1(x)=-\frac{1}{8}e^x$$

Ecuația omogenă corespunzătoare va fi :

$$y^{(3)}+2y^{(2)}-5y^{(1)}-6y=0 \tag{5.4.5}$$

iar ecuația caracteristică

$$\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6=0$$

Se poate verifica lesne că ecuația de mai sus are rădăcinile :

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-3.$$

și, prin urmare :

$$y_1=e^{-x},\qquad y_2=e^{2x},\qquad y_3=e^{-3x}$$

vor fi soluții particulare ale ecuației (5.4.5). Soluția ei generală va fi dată de :

$$Y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}$$

În fine, soluția generală a ecuației fdiferențiale (5.4.4) are forma :

$$y(x)=y_1+Y=-\frac{1}{8}e^x+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x} \tag{5.4.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă s-ar pune problema Cauchy în care se cere soluția ecuației (5.4.4) care satisface, de exemplu, condițiile

$$y(0)=-\frac{1}{8},\quad y'(0)=-\frac{1}{8},\quad y''(0)=\frac{7}{8} \tag{5.4.7}$$

din (5.4.6) prin derivare, se găsește :

$$y(0)=-\frac{1}{8}+C_1+C_2+C_3=-\frac{1}{8}$$

$$y'(0)=-\frac{1}{8}-C_1+2C_2-3C_3=-\frac{1}{8}$$

$$y''(0)=-\frac{1}{8}+C_1+4C_2+9C_3=\frac{7}{8}$$

Obținem astfel un sistem de ecuații algebrice pentru constantele necunoscute și anume :

$$\begin{aligned} C_1+C_2+C_3&=0\\ -C_1+2C_2-3C_3&=0\\ C_1+4C_2+9C_3&=1 \end{aligned}$$

Rezolvînd acest sistem, găsim :

$$c_1=-\frac{1}{6},\qquad c_2=\frac{1}{15},\qquad c_3=\frac{1}{10}$$

Prin urmare, soluția ecuației (5.4.4) care satisface condițiile (5.4.7) este :

$$y(x)=-\frac{1}{8}e^{x}-\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{1}{15}e^{2x}+\frac{1}{10}e^{-3x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. R. G. D. ALLEN, *Analiză matematică pentru economiști*. Editura Științifică, București. 1971.
2. GR. AGOPIAN și COLECTIVUL, *Matematici superioare*, vol. 1, ed. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
3. CAIUS IACOB, *Lecții de matematici superioare*, Editura Tehnică, București, 1959.
4. M. CERCHEZ, *Probleme de optimizare cu aplicații practice*, Editura Militară, București, 1970.
5. I. CRAIU și COLECTIVUL, *Matematici pentru economiști*, vol. I și II, Editura Tehnică, București, 1966 și 1972.
6. R. CRSTESCU, *Matematici generale*, vol. I, Editura Didactică și Pedagogică, București. 1967.
7. D. DEMIDOVITCH, *Recueil d'exercices et de problèmes d'Analyse Mathématique*, Éditions MIR, Moscow, 1974.
8. N. DONCIU, D. FLONDOR, *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
9. G. M. FIHTENHOLT, *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. II, (Traducere din lb. rusă), Editura Tehnică, București, 1964.
10. N. GHEORGHIU, T. PRECUPANU, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
11. M. K. GREBENCINA, S. I. NOVOSELOV, *Curs de analiză matematică* (în limba rusă), partea a 2-a, Ediția a III-a, Editura de Stat, Moscova, 1961.
12. J. M. HENDERSON, R. E. QUANDT, *Microeconomic Theory, A Mathematical approach*, mc. Grow-Hill Company Inc., New York, 1958.
13. U. HOFFMAN, H. HOFFMAN, *Einführung in die Optimierung*, Verlag chemie GmbH. 1979.
14. K. LANCASTER, *Analiză economică matematică*, Editura Științifică, București, 1973.
15. E. MIHAILA, C. POPESCU, *Matematici speciale aplicate în economie*. Editura Didactică și Pedagogică, București. 1978.
16. M. NICOLESCU, *Analiză matematică*, vol. 1 și 2. Editura Academiei R.S.R.. 1952—1953.
17. T. POSTELNICU, C. DINESCU, B. SAVULESCU, *Matematici speciale aplicate în economie*, Editura Didactică și Pedagogică. București. 1977.
18. P. STANCIU, *Matematici aplicate în economie*. Editura „Facla", Timișoara, 1983.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

INTRODUCERE 3

CAPITOLUL 1. SERII NUMERICE ŞI SERII DE FUNCŢII . . . 5

1. **Serii numerice** 5
1.1. Noţiunea de convergenţă 5
1.2. Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergenţă . . . 14
1.3. Serii alternate 24
1.4. Serii cu termeni oarecare 25
2. **Serii de funcţii** 27
2.1. Şiruri de funcţii. Convergenţă 27
2.2. Serii de funcţii. Proprietăţi generale 31
2.3. Serii de puteri. Domeniu de convergenţă 36
2.4. Serii Taylor şi serii Mac Laurin 42
2.5. Dezvoltări în serii de puteri 47

CAPITOLUL 2. FUNCŢII REALE DE *n* VARIABILE REALE . .

1. **Preliminarii** 50
1.1. Spaţiul euclidian R^n 50
1.2. Mulţimi în R^n 53
1.3. Şiruri în R^n 57
2. **Funcţii reale de *n* variabile reale** 59
2.1. Generalităţi 59
2.2. Funcţii de două variabile 60
2.3. Imaginea geometrică a unei funcţii de două variabile 61
2.4. Secţiuni plane (curbe de nivel şi secţiuni verticale) . . 63
2.5. Funcţii de n variabile 64
2.6. Suprafeţe de nivel 65
2.7. Funcţii omogene şi funcţii convexe 66
2.8. Funcţii de n variabile în matematica economică . . . 67
3. **Limite şi continuitate** 74
3.1. Limita unei funcţii de n variabile 74
3.2. Continuitatea funcţiilor de n variabile 78
4. **Derivate parţiale** 79
4.1. Preliminarii 79
4.2. Derivate parţiale de ordinul întîi 81
4.3. Semnificaţia geometrică a derivatelor parţiale 84
4.4. Gradientul unei funcţii 86
4.5. Derivate şi derivate parţiale în matematica economică (valori medii, valori marginale, elasticităţi) 87

Scanned with OKEN Scanner

4.6. Derivate parțiale de ordin superior 100
5. **Diferențialele funcțiilor de *n* variabile** 105
5.1. Preliminarii 105
5.2. Diferențiala de ordinul întîi pentru o funcție de *n* variabile 106
5.3. Diferențiale de ordin superior 113
5.4. Derivarea funcțiilor compuse 115
5.5. Formula lui Taylor pentru funcții de *n* variabile . . 120
6. **Extremele funcțiilor de *n* variabile** 126
6.1. Condiții necesare de extrem 127
6.2. Condiții suficiente de extrem 129
6.3. Extreme condiționate (constrînse sau legate) Multiplicatorii lui Lagrange 136

CAPITOLUL 3. ELEMENTE SPECIALE DE CALCUL INTEGRAL

1. **Integrale improprii (generalizate)** 151
1.1. Integrale cu limite infinite 151
1.2. Teoreme și criterii de convergență pentru integrale improprii cu limite infinite 156
1.3. Integrale improprii de funcții nemărginite 162
1.4. Teoreme și criterii din convergență pentru integralele funcțiilor nemărginite 166
1.5. Transformarea și calculul integralelor improprii . . . 169
2. **Integrale depinzînd de un parametru** 172
2.1. Continuitatea în raport cu parametrul λ 172
2.2. Derivarea în raport cu parametrul λ 173
2.3. Integrarea în raport cu parametrul (integrale iterate) . . 175
2.4. Integrale improprii depinzînd de un parametru . . . 177
3. **Integrale improprii cu aplicații în matematica economică** (Integralele lui Euler) 180
3.1. Funcția Gamma 180
3.2. Funcția B (p, q) 183
3.3. Integraa Euer-Poisson 187
4. **Integrala dublă** 191
4.1. Definiția integralei duble 191
4.2. Interpretarea geometrică a integralei duble 194
4.3. Proprietăți ale integralei duble 198
4.4. Calculul integralei duble 199
4.5. Schimbarea de variabilă în integrala dublă 205

CAPITOLUL 4. AJUSTĂRI ȘI INTERPOLĂRI . . . . . .

1. **Ajustări analitice. Metoda celor mai mici pătrate** 212
1.1. Probleme generală 212
1.2. Ajustarea liniară 217
1.3. Ajustarea parabolică de ordinul al doilea 220
1.4. Ajustarea prin funcția exponențială 224
2. **Problema interpolării** 226

Scanned with OKEN Scanner

2.1. Aspecte generale 226
2.2. Metoda de interpolare a lui Lagrange 229

CAPITOLUL 5. ECUAȚII DIFERENȚIALE 232

1. **Noțiuni generale** 232
1.1. Noțiunea de ecuație diferențială 232
1.2. Tipuri de soluții 233
2. **Ecuații diferențiale de ordinul întîi integrabile prin cuadraturi** 234
2.1. Generalități 234
2.2. Ecuații în care variabilele se separă 235
2.3. Ecuații omogene 237
2.4. Ecuații liniare 238
2.5. Ecuații diferențiale reductibile la ecuații de ordinul întîi liniare 242
3. **Ecuații diferențiale de ordinul al doilea** 244
3.1. Ecuații reductibile la ecuații de ordinul întîi 244
3.2. Ecuații diferențiale de ordinul al doilea cu coeficienți constanți 248
3.3. Ecuații de ordinul al doilea cu coeficienți constanți neomogene (cu membrul drept, o funcție dată) 252
4. **Ecuații diferențiale liniare de ordinul *n* cu coeficienți constanți** 254
4.1. Considerații generale 254
4.2. Soluția generală a unei ecuații de ordinul n 255
Bibliografie 259

Scanned with OKEN Scanner